

『離散構造』 Short Quiz および略解
亀山

以下のものについて、本日の授業終了時点までに解き提出しなさい。

学籍番号: _____

氏名: _____

Quiz 1. 命題 $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$ は パースの論理式とよばれる有名な論理式である．これと同値な論理式で，なるべく短いものを答えなさい．

答. 真理値表を書くと、

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

となり、これは恒真式である。したがって、 $R \vee (\neg R)$ や $P \Rightarrow P$ などの論理式と同値である。一番短いのは、 $P \Rightarrow P$ である。(もし、「真」を意味する論理式 T があれば、 T と同値であり、それが一番短い。)

Quiz 2. A が、基本命題と論理記号 \wedge だけで構成された命題とする．また、 A に含まれる \wedge の個数は5個であるとする．ただし、 A が具体的にどのような形かはわからないものとし、また、基本命題が何個あるかもわからないものとする．

このとき、 A の部分命題の個数は最大何個であるか答えなさい．

答. この問題は、本当に正当をだしてくれ、というよりは、授業で説明していない「部分命題」という言葉で、皆さんが何を想像するかを知りたかったものである。部分命題という言葉の定義次第で、いろいろな解答があるのは当然であり、short quiz は正答率を競うものではないので、答えがあっているかどうかは気にしなくてよい。

とはいえ、ちゃんと答えだけはだしておくと、論理式 A の部分論理式とは、 A の一部となる論理式のことであるが、ここで大事なものは、構造を壊さないようにしたものというこである。たとえば、 $(P \wedge Q) \wedge R$ の部分論理式は、 $P, Q, R, P \wedge Q, (P \wedge Q) \wedge R$ の5個であり、 $Q \wedge R$ や $P \wedge R$ といった論理式は、部分論理式ではない。

このことを踏まえた上記の答え: \wedge を N 個つけた論理式は、サイズが $2N+1$ であり(論理式のサイズは、論理記号の個数と基本命題の個数の総和とする。ただし、同じ記号を2回つけても2個と数える)、この論理式の部分命題は、各記号を頂点とする木になるので、要するに論理式のサイズと部分論理式の個数は一致する。つまり、 $2N+1$ 個である。ただし、ここでの数え方は、同じ論理式が2回以上部分論理式としてでてきたときも重複して数えているので、実際の(相異なる)部分論理式は $2N+1$ 個より少ないかもしれない。そこで、「最大 $2N+1$ 個ある」というのが正解である。

たとえば、 $P \wedge P \wedge P \wedge P \wedge P \wedge P$ という論理式 (括弧は左からついているとする) の部分論理式は、6 個であるが、 $P \wedge Q \wedge R \wedge S \wedge T \wedge U$ という論理式 (括弧は左からついているとする) の部分論理式は、11 個ある。