

『離散構造』 1章の例題とその解答

問1 (命題論理による表現)

例題にならって、次の文を論理式で表現せよ。ただし、各問題ごとに指定された基本命題を使うこと。

- (a) 「雨が降っていたら、A君は傘を持っていく。」

答. 基本命題として、 P = 「雨が降っている」、 Q = 「A君は傘を持っていく」とすれば、「 $P \Rightarrow Q$ 」と表現できる。

- (b) 「A君は怒られなければ勉強しない」と「A君が勉強したら怒られた」(基本命題: P = 「A君が怒られる」、 Q = 「A君が勉強する」)

答. 前者は、「 $(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$ 」である。後者は、「 $Q \Rightarrow P$ 」である。

[補足] この2つの論理式は、真理値表を書けばわかるように、同値である。つまり、「A君は怒られなければ勉強しない」という場合に、「A君が勉強したら怒られた」ということになってしまう、という不思議な現象である。

しかし、よく考えてみれば、不思議なことはない。上記の日本語の文は、時間的順序(因果関係)を含んでいるのに対して、論理式では、時間の情報が失われてしまったのが問題である。つまり、「A君は怒られなければ勉強しない」と同値な(日本語の)文は、「A君が勉強したら怒られた」ではなく、「A君が勉強しているとしたら、それより前に怒られたからだ」という意味になる。これならば、何も矛盾はない。

- (c) 「授業が面白いか、単位が欲しければ、授業に出席する」(基本命題: P = 「授業が面白い」、 Q = 「単位が欲しい」、 R = 「授業に出席する」)

答. これは、「 $(P \vee Q) \Rightarrow R$ 」となる。

問2 (述語論理による表現)

次の文を述語論理の論理式で表現せよ。

- (a) 「AさんがBさんの親で、BさんがCさんの親なら、AさんはCさんの祖父か祖母である。」

答. 「 x は y の親である」を $P(x, y)$ とし、「 x は y の祖父である」を $Q(x, y)$ とし、「 x は y の祖母である」を $R(x, y)$ とすると、「 $(P(A, B) \wedge P(B, C)) \Rightarrow (Q(A, Z) \vee R(A, Z))$ 」と表せる。

- (b) 「 x は平方数である(ある整数の2乗になっている)。」

答. 「 y は整数である」を $\text{int}(y)$ と表す。上記の文は、 $\text{int}(y) \wedge x = y^2$ という命題になりそうであるが、これでは x だけでなく、 y にも依存する命題になってしまう。問題文は x のみについて書いてあるので、これではおかしい。実際には「そのような y がある」ということなので、述語論理の範囲で、「 $\exists y. (\text{int}(y) \wedge x = y^2)$ 」と記述するとよい。このように書けば、「ある y について...が成立する」という命題になり、 y には依存しない。

- (c) 「情報科学類の学生ならば、プログラミングが大好きである。」

答. 「 x は情報科学類の学生である」を $J(x)$ とし、「 x はプログラミングが大好きである」を $P(x)$ とすると、「 $J(x) \Rightarrow P(x)$ 」と表現できそうに思うかもしれないが、これでは、「 x が情報科学類の学生ならば、 x はプログラミングが大好きである。」という意味になってしまう。

上記の日本語は、(暗黙のうちに)「すべての x に対して、...が成立する」という意味になっているので、「すべての」をあらわす論理記号を追加して、「 $\forall x. (J(x) \Rightarrow P(x))$ 」と表現するとよい。

数学やソフトウェアの世界では、このように「暗黙のうちに、「すべての」を省略する」ことが非常に多くおこなわれている。

(d) (発展課題) 「 x は y と z の最小公倍数である」

答. 「 y は x を割り切る (x は y の倍数である)」を $y|x$ と表すと、「 $y|x \wedge z|x$ 」となりそうである。しかし、これでは、「そのようなものの中で x が最小である」であることが表現できていない。「ある性質を満たすものの中で最小」というのは結構難しい。答えは以下の通り。

$$(y|x \wedge z|x) \wedge \forall w. ((y|w \wedge z|w) \Rightarrow x \leq w)$$

この式の右の方は、「 w が y, z の公倍数であれば、 $x \leq w$ である」という性質が、どんな w に対しても成立する、ということなので、 x が y, z の公倍数の中で最小であることを意味する。

問3 真理値表に関する以下の問いに答えよ。

(a) 命題 $A \wedge B$ の否定の真理値表と、命題 $(\neg A) \vee (\neg B)$ の真理値表が等しくなることを確認せよ。このことを通して、命題「 x と y が奇数である」を否定すると、命題「 x が奇数でないか、または、 y が奇数でない」となることを確認せよ。

答. 真理値表は以下の通り。

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

命題 A を「 x が奇数である」、命題 B を「 y が奇数である」とすると、 $A \wedge B$ は、「 x と y が奇数である」となり、 $(\neg A) \vee (\neg B)$ は、「 x が奇数でないか、または、 y が奇数でない」となる。上記の真理値表より、前者の否定と後者は同値である。

(b) 命題 $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$ の真理値表を作成し、恒真式となるか否かを確認せよ。

答. 真理値表は以下の通りで、恒真式となる。

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	全体
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T	T

問 4 以下の式の両辺は、論理的に同値である。

$$\begin{aligned}(\neg(\neg A)) &\Leftrightarrow A \\(\neg(A \wedge B)) &\Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B)) \\(\neg(A \vee B)) &\Leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B)) \\(A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow ((\neg A) \vee B) \\(A \Leftrightarrow B) &\Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \\((A \wedge B) \vee C) &\Leftrightarrow ((A \vee C) \wedge (B \vee C)) \\(C \vee (A \wedge B)) &\Leftrightarrow ((C \vee A) \wedge (C \vee B))\end{aligned}$$

上記の同値性を利用して、以下の命題を論理積標準形 (Conjunctive Normal Form) に変形せよ。

- $(A \wedge B \wedge C) \vee (D \wedge E)$.
- $\neg((A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D))$.

ただし、論理積標準形とは以下の形の命題のことである。

$$(L_{1,1} \vee L_{1,2} \vee \cdots \vee L_{1,n}) \wedge \cdots \wedge (L_{k,1} \vee L_{k,2} \vee \cdots \vee L_{k,n'})$$

(各 $L_{i,j}$ は、基本命題か、基本命題に否定記号 (\neg) をつけたものに限る。)

答。命題 $(A \wedge B \wedge C) \vee (D \wedge E)$ の論理積標準形の計算は以下の通り。(以下の計算では、書き換えの 1 ステップを矢印 (\rightsquigarrow) で表現している。)

$$\begin{aligned}(A \wedge B \wedge C) \vee (D \wedge E) &\rightsquigarrow (A \vee (D \wedge E)) \wedge (B \vee (D \wedge E)) \wedge (C \vee (D \wedge E)) \\&\rightsquigarrow (A \vee D) \wedge (A \vee E) \wedge (B \vee D) \wedge (B \vee E) \wedge (C \vee D) \wedge (C \vee E)\end{aligned}$$

命題 $\neg((A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D))$ の論理積標準形の計算は以下の通り。

$$\begin{aligned}\neg((A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D)) &\rightsquigarrow \neg((\neg(A \wedge B)) \vee (C \vee D)) \\&\rightsquigarrow (\neg(\neg(A \wedge B))) \wedge (\neg(C \vee D)) \\&\rightsquigarrow (A \wedge B) \wedge ((\neg C) \wedge (\neg D)) \\&\rightsquigarrow A \wedge B \wedge (\neg C) \wedge (\neg D)\end{aligned}$$

問 5 (発展課題) 以下の文を、証明もしくは反証せよ。ただし、反証とは正しくないことを証明することである。

- (a) 連続した 3 つの自然数をかけた数は、6 で割り切れる。

答。「問 1」でやったように、問題文は、「すべての連続した 3 つの自然数に対して、それらをかけた数は、6 で割り切れる。」という意味である。これが正しいかどうかであるが、連続した 2 つの整数の積は 2 で割り切れ、連続した 3 つの整数の積は 3 で割り切れるので、連続した 3 つの整数の積は 6 で割り切れる。よって正しい。

- (b) 7 で割り切れない自然数の 6 乗は、7 で割ると 1 余る。

答。正しいので証明する。まず、「 x^6 を 7 で割った余り」は、「 x を 7 で割った余り」の 6 乗を 7 で割った余りと等しい。 x は 7 で割り切れないので、「 x を 7 で割った余り」は 1, 2, 3, 4, 5, 6 のいずれかである。これらを 6 乗して 7 で割ってみると、余りは、1, 1, 1, 1, 1, 1 となるので、いずれのケースでも 7 で割ると 1 余る。なお、この問題は、Fermat の (小) 定理の具体的な例である。

問 6 (発展的な問題)

以下の論理式が常に正しいかどうか、理由をつけて述べよ。

- $(\exists y.\forall x.P(x,y)) \Rightarrow (\forall x.\exists y.P(x,y))$

答。真である。 \Rightarrow の前の部分論理式 (「 \Rightarrow の前提」と言う) が真であるとき、どんな x に対しても、 $P(x,y)$ が成立する y が存在する。この y のことを y_0 と書くことにする。

\Rightarrow の後の部分論理式において、「どんな x に対しても、上記の y_0 をとってくれば $P(x,y_0)$ が成立する」のだから、 $\forall x.\exists y.P(x,y)$ は真である。

以上から、どんな $P(x,y)$ に対しても上記の命題が成立する。

- $(\forall x.\exists y.P(x,y)) \Rightarrow (\exists y.\forall x.P(x,y))$

[ヒント: x, y を自然数を表す変数とし、 $P(x,y)$ を「 $x = y$ 」や「 $x < y$ 」などとしてみるとよい.]

答。 $P(x,y)$ を $x < y$ と置いてみると、 $\forall x.\exists y.P(x,y)$ は、「どんな自然数 x に対しても、それより大きい自然数 y が存在する」という意味になり、これは真である。($y = x + 1$ と取れば良い。)

一方、 $\exists y.\forall x.P(x,y)$ は、「どんな自然数 x よりも大きい自然数 y が存在する」という意味になり、そんな自然数は存在しないので偽である。

\Rightarrow の前提が真で、帰結が偽なので、全体としては、偽である。

$P(x,y)$ を $x < y$ と置いてみた場合だけであっても、偽となるケースがある、ということは、最初の論理式は「常に正しくはない」ということになる。