

## 離散構造 期末試験 解答

問 1. (配点 25 点)

(1-a) 花子と太郎の 4 つの希望を述べた文をそれぞれ命題論理の論理式を使って表現せよ .

答え.

- 希望 1 :  $Q \vee R$
- 希望 2 :  $\neg(Q \wedge R)$
- 希望 3 :  $\neg Q \Rightarrow P \wedge R$
- 希望 4 :  $S \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

(1-b) 2 人で相談しているとき , 太郎君は「桜木町駅に近い高級レストランは , どこも安くはないけど料理はおいしいね」と言った . この文を , 以下の述語記号と個体定項を使って述語論理の論理式として記号化せよ .

答え.  $\forall x(N(x, s) \wedge F(x) \Rightarrow \neg C(x) \wedge D(x))$

(1-c) デートコースが上記の 4 つの希望を全て満たしている限り , 「山下公園と高級レストランの両方に行くのならば , デパートには行かない」ということは成り立つと言えるか . 成り立つ場合にはその理由を , 成り立たない場合には反例を挙げて答えよ .

答え. まず , (1-c) 以下の問題を解くために必要となる真理値表を示す .

$P$	$Q$	$R$	$S$	希望 1 $Q \vee R$	希望 2 $\neg(Q \wedge R)$	希望 3 $\neg Q \Rightarrow P \wedge R$	希望 4 $S \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	(1-c) の命題 $P \wedge Q \Rightarrow \neg R$	新たな希望 $\neg R \wedge \neg S \Rightarrow P \wedge Q$
T	T	T	T	T	F	T	F	F	T
T	T	T	F	T	F	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T	T	F	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T	F	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F	F	T	T
T	F	F	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	T	T	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T	T	F
F	F	T	T	T	T	F	T	T	T
F	F	T	F	T	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	T	F	F	T	F

真理値分析の結果から明らかなように , 希望 1 から希望 4 のすべての論理式が真となる行は 4 , 6 , 12 行目である . 一方 , ここで問題となっている性質を論理式で表すと  $P \wedge Q \Rightarrow \neg R$  となり , その真理値は 4 , 6 , 12 行目のいずれにおいても真となることが分かる . よって , 問題としている性質は , 4 つの希望を全て満たしている限り成り立つと言える .

(1-d) 4 つの希望を全て満たすようなデートコースはあるか否かを答えよ . また , あるとしたら , 高級レストラン以外の 3 つの候補地のうち , どこに行けばよいか . 理由をつけて答えよ .

答え. 山下公園とデパートの 2 箇所に行くプランが , 4 つの希望を全て満たす . 理由は , 先の真理値分析の結果より , 真理値表の 6 行目に対応するこのプランは , 高級レストランに行かなくても全ての希望を満たすことができるため .

(1-e) 太郎君の発言は正しいか否か，理由をつけて答えよ．また，もしも間違っている場合には，花子さんの新たな希望も含めた 5 つの希望のすべてがかなうプランを示せ．

答え. 正しくない．なぜなら，真理値表の 4 行目と 6 行目に対応するプランは，それぞれ最初の 4 つの希望と花子の新しい希望を全て満たすことができるため．したがって，山下公園と高級レストランの 2 箇所に行くプラン（真理値表の 4 行目に対応するプラン）か，もしくは山下公園とデパートの 2 箇所に行くプラン（真理値表の 6 行目に対応するプラン）を採用すればよい（2 つのプランのうち，どちらか 1 つが示されていれば正解とする．）

問 2. (配点 25 点)

整数の集合を  $Z$  とし，関数  $f_1, f_2, f_3 : Z \rightarrow Z$  を次のように定義する．

$$f_1(x) = x^2 \pmod{4}$$

$$f_2(x) = x^3$$

$$f_3(x) = \text{floor}(x/2)$$

ただし，非負の整数  $a$  に対して  $a \pmod{6}$  は， $a$  を 6 で割った余りを表し，実数  $r$  に対して  $\text{floor}(r)$  は， $r$  の小数点以下を切り捨てた整数を表す．たとえば， $13 \pmod{6} = 1$  であり， $\text{floor}(7/2) = 3$ ， $\text{floor}(-9/2) = -4$  である．このとき，以下の問に答えなさい．

(2-a)  $f_1(x) = x$  となる整数  $x$  をすべて求めなさい．

答え.  $0 \leq f_1(x) < 4$  より， $f_1(x) = x$  であれば， $x = 0, 1, 2, 3$  である．そこでこの 4 つの値について調べると， $f_1(0) = 0$ ， $f_1(1) = 1$ ， $f_1(2) = 0$ ， $f_1(3) = 1$  となる．よって， $x = 0, 1$  のとき  $f_1(x) = x$  となる．

(2-b)  $f_2, f_3$  のうち，単射でないものをすべてあげた上で，その理由を述べなさい．また， $f_2, f_3$  のうち，全射でないものをすべてあげた上で，その理由を述べなさい．

なお， $f_i$  は，自然数上の関数ではなく整数上の関数であることに注意せよ．

答え.

$f_3$  は単射でない:  $f_3(0) = 0 = f_3(1)$  であるから．

(参考:  $f_2$  は単射である．すべての整数  $x, y$  に対して  $x < y$  ならば  $f_2(x) < f_2(y)$  が成立するから．)

$f_2$  は全射でない:  $f_2(x) = 2$  となる整数  $x$  は存在しないから．

(参考:  $f_3$  は全射である． $x = 2k$  とすると  $f_3(x) = k$  であり， $k$  がすべての整数をわたると， $f_3(x)$  の値もすべての整数をわたる．)

(2-c) 集合  $S$  を 2 の倍数の集合，集合  $T$  を 3 の倍数の集合とする．また，関数  $g$  および  $Z$  の部分集合  $S$  に対して， $g(S)$  は，関数  $g$  による  $S$  の像を表す．

以下の等式について，成立するかないかを答えた上で，その理由を簡潔に説明しなさい．

$$f_2(S \cup T) = f_2(S) \cup f_2(T)$$

$$f_3(S \cap T) = f_3(S) \cap f_3(T)$$

答え.

$f_2(S \cup T) = f_2(S) \cup f_2(T)$  は成立する．理由:  $f_2(S \cup T) \supset f_2(S)$  および  $f_2(S \cup T) \supset f_2(T)$  は「像」の定義から明らかである．

次に  $f_2(S \cup T) \subset f_2(S) \cup f_2(T)$  を示そう．任意の  $y \in f_2(S \cup T)$  を取る．像の定義から， $f(x) = y$  となる  $x \in S \cup T$  が存在する．これより， $x \in S$  または  $x \in T$  が成立する． $x \in S$  ならば， $y \in f_2(S)$  であり， $x \in T$  ならば， $y \in f_2(T)$  なので，いずれにしても， $y \in f_2(S) \cup f_2(T)$  である．よって， $f_2(S \cup T) \subset f_2(S) \cup f_2(T)$  が示せた．

$f_3(S \cap T) = f_3(S) \cap f_3(T)$  は成立しない．理由: 左辺は 3 の倍数の集合であるため, 1 は左辺の要素ではない．一方,  $2 \in S$  かつ  $f_3(2) = 1$  と,  $3 \in T$  かつ  $f_3(3) = 1$  より,  $1 \in f_3(S) \cap f_3(T)$  である．

(2-d)  $f_i \circ g$  が恒等関数となる適当な関数  $g: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$  および  $i$  (ただし,  $i \in \{1, 2, 3\}$ ) を 1 組与えなさい．

答え. 関数  $g: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$  を  $g(x) = 2x$  で定義し,  $i = 3$  とすると,  $f_3 \circ g$  が恒等関数となる．理由:  $(f_3 \circ g)(x) = f_3(g(x)) = f_3(2x) = \text{floor}(x) = x$  であるから．

(2-e)  $h \circ f_3$  が恒等関数となる関数  $h: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$  が存在しないことを証明しなさい．

答え. そのような関数が  $h$  が存在すると仮定する．すると,  $0 = (h \circ f_3)(0) = h(f_3(0)) = h(0)$ , また,  $1 = (h \circ f_3)(1) = h(f_3(1)) = h(0)$  となり, 矛盾する．

問 3. (配点 25 点)

$2 \times 2$  行列の集合  $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$  とする．次に  $V$  上の 2 項関係  $R, S$  をそれぞれ以下のように定める．

$$m R m' \iff m' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot m$$

$$m S m' \iff m' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot m$$

(3-a) 頂点集合を  $V$ , 辺集合を  $R \cup S$  とする有向グラフ  $G$  を図示しなさい．辺の向きと各頂点に対応する  $V$  の要素が, 図からはっきり読み取れるようにすること．

答え. グラフ  $G$  を図示すると図 1 のようになる．

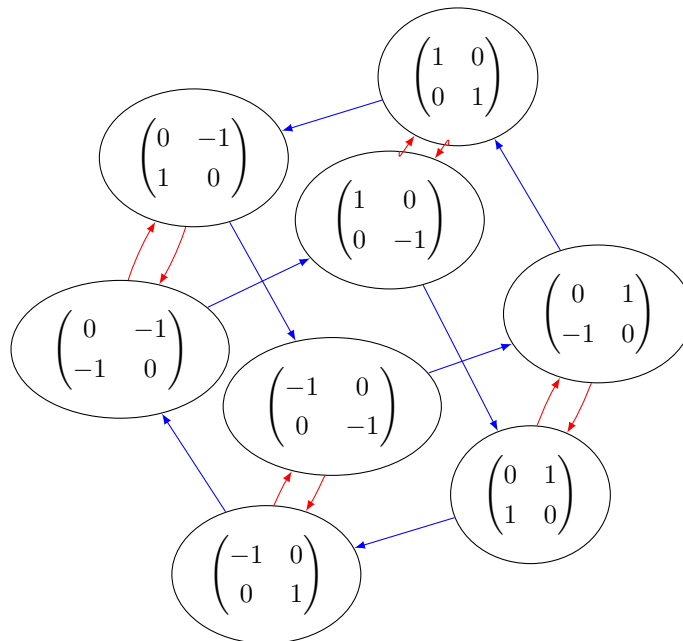


図 1: グラフ  $G$ .  $\rightarrow$  は  $R$  由来の辺を,  $\rightarrow$  は  $S$  由来の辺を表す．

(3-b) 有向グラフ  $G$  の頂点と辺の数をそれぞれ答えよ．

答え. 頂点の数は 8, 辺の数は 16 である．

(3-c) 有向グラフ  $G$  において, 最長の単純道 (同じ辺を 2 回以上通らない道) を一つ挙げ, その長さを答えよ．

答え.  $G$  は一筆書き可能であるため, 例えば

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

が最長の単純道であり, その長さは 16 である.

(3-d) 関係  $R$  が推移的, 反対称的であるか否かそれぞれ理由をつけて答えよ.

答え.  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  かつ  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  だが  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  ではないので  $R$  は推移的でない.  $x R y$  かつ  $y R x$  となる  $x, y \in V$  は存在しないので  $R$  は反対称的である【2017/1/17 「反対称的でない」と間違っていたのを訂正】.

(3-e) 合成関係  $S \circ S$  が同値関係であるか否か理由をつけて答えよ.

答え.  $S \circ S = \left\{ \langle x, y \rangle \in V \times V \mid \exists z \left( z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot x \wedge y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot z \right) \right\} = \{ \langle x, y \rangle \in V \times V \mid x = y \}$  である. したがって  $S \circ S$  は同値関係である.

理由: すべての  $x \in V$  について  $x = x$  が成り立つので  $S \circ S$  は反射的である. また, すべての  $x, y \in V$  について  $x = y$  ならば  $y = x$  が成り立つので対称的である. さらに, すべての  $x, y, z \in V$  について  $x = y$  かつ  $y = z$  ならば  $x = z$  が成り立つので推移的である.

問 4. (配点 25 点)

(4-a) 集合  $List_D$  の部分集合  $S = \{ \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in List_D \mid n \geq 0, \forall i \forall j (0 \leq i \leq j \leq n \Rightarrow x_i \leq x_j) \}$  を帰納的に定義せよ.

答え.

- Base case (1):  $\langle \rangle \in S$ .
- Base case (2): 任意の  $x \in D$  について,  $\langle x \rangle \in S$ .
- Induction Step:  $L \in S \wedge x \in D \wedge x \leq head(L) \Rightarrow cons(x, L) \in S$ .

(4-b)  $calc(\langle 2, 0, 1, 3 \rangle)$  を  $calc$  の定義に従って計算せよ. ただし, 計算の過程も明記すること.

答え.

$$\begin{aligned} calc(\langle 2, 0, 1, 3 \rangle) &= calc(\langle 0, 1, 3 \rangle) + 2 \\ &= (2 \times calc(\langle 1, 3 \rangle)) + 2 \\ &= (2 \times (calc(\langle 3 \rangle) + 1)) + 2 \\ &= (2 \times ((calc(\langle \rangle) + 3) + 1)) + 2 \\ &= (2 \times ((0 + 3) + 1)) + 2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

(4-c) このとき,  $str(\langle 2, 0, 1, 3 \rangle)$  を  $str$  の定義に従って計算せよ. ただし, 計算の過程も明記すること.

答え.

$$\begin{aligned} str(\langle 2, 0, 1, 3 \rangle) &= str(\langle 0, 1, 3 \rangle)2 \\ &= str(\langle 1, 3 \rangle)str(\langle 1, 3 \rangle)2 \\ &= str(\langle 3 \rangle)1str(\langle 3 \rangle)12 \\ &= str(\langle \rangle)31str(\langle \rangle)312 \\ &= 31312 \end{aligned}$$

(4-d) 集合  $E$  の要素  $e$  と集合  $D^+$  の要素  $n$  に対して,  $e$  に現れる  $n$  の個数を求める関数  $cnt : E \times D^+ \rightarrow \mathcal{N}$  を帰納的に定義せよ.

答え.

$$cnt(e, n) = \begin{cases} 0 & (e = \Lambda \text{ のとき}) \\ cnt(e', n) + 1 & (e = e'n \text{ のとき}) \\ cnt(e', n) & (e = e'n' \text{ かつ } n \neq n' \text{ のとき}) \end{cases}$$

(4-e) 「 $List_D$  の任意の要素  $L$  について,  $calc(L) = sum(str(L))$  が成り立つ」ことを,  $L$  に関する帰納法により証明せよ.

答え.  $L$  に関する帰納法により示す.

- Base case ( $L = \langle \rangle$  のとき):

左辺については,  $calc$  の定義より  $calc(\langle \rangle) = 0$ . 一方, 右辺については,  $str$  と  $sum$  の定義より  $sum(str(\langle \rangle)) = sum(\Lambda) = 0$  となるので明らか.

- Induction step 1 ( $L = cons(n, L') \wedge n \neq 0$  のとき)

左辺については,  $calc$  の定義より  $calc(cons(n, L')) = calc(L') + n$ . 一方, 右辺については,  $str$  と  $sum$  の定義より  $sum(str(cons(n, L'))) = sum(str(L')n) = sum(str(L')) + n$ . ここで, 帰納法の仮定より  $calc(L') = sum(str(L'))$  であるから,  $calc(L) = sum(str(L))$  が成り立つ.

- Induction step 2 ( $L = cons(0, L')$  のとき)

左辺については,  $calc$  の定義より  $calc(cons(0, L')) = 2 \times calc(L')$ . 一方, 右辺については,  $sum(str(cons(0, L'))) = sum(str(L') \cdot str(L'))$ . 定理より,  $sum(str(L') \cdot str(L')) = sum(str(L')) + sum(str(L'))$ . ここで, 帰納法の仮定より  $calc(L') = sum(str(L'))$  であるから,  $calc(L) = sum(str(L))$  が成り立つ.

以上により,  $List_D$  の任意の要素  $L$  について,  $calc(L) = sum(str(L))$  が示された.

(証明終)