離散構造 期末試験, 2014 年 12 月 26 日 (金)

問 1. (配点 20 点)

(1-a) 答えは以下の通りである。

- 条件 1 : $\neg(P \wedge Q)$
- 条件 2 : $(P \vee R) \wedge (Q \vee S)$
- 条件 3 : $\neg(Q \wedge S)$
- 条件 4 : $R \Rightarrow \neg S$
- 条件 5 : $(R \Rightarrow P) \wedge (S \Rightarrow Q)$

ただし、正解は一つだけでなく、上記の論理式と同値になる論理式は全て正解である。例えば、条件 1 については $\neg P \vee \neg Q$ なども正解である。

(1-b) この問題を解くためには、16 通りあるシフトのそれぞれについて、条件 1〜3 を満たすか否かを調べればよい。より具体的には、P, Q, R, S を命題変数とする真理値表を作成し、その表を使って条件 1〜3 を表す論理式の真理値分析を行う。条件 1〜3 の論理式が全て真となる行が、条件を全て満たすシフトの一つに対応しているので、あとはそういう組み合わせが全部でいくつあるかを数えればよい。

真理値分析をした結果は以下の通りである。

P	Q	R	S	条件 1 $\neg(P \wedge Q)$	条件 2 $(P \vee R) \wedge (Q \vee S)$	条件 3 $\neg(Q \wedge S)$	条件 4 $R \Rightarrow \neg S$	条件 5 $(R \Rightarrow P) \wedge (S \Rightarrow Q)$	(1-c) の性質 $S \Rightarrow \neg R$
T	T	T	T	F	T	F	F	T	F
T	T	T	F	F	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	F	T	T	T
T	T	F	F	F	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T	F	F	F
T	F	T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	T	T	F	T
T	F	F	F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T	F	T
F	T	F	T	T	F	F	T	T	T
F	T	F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	F	F	F
F	F	T	F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	F	T	T	T	T

この結果から明らかなように、条件 1〜3 の論理式が全て真となる行は、5、7、10、13 行目の 4 つである。従って、答えは 4 通りである。

[補足] この問題では聞かれていないが、条件 1〜3 を全て満たすような具体的なシフトが知りたければ、上記の 4 つの行の P, Q, R, S の真偽の組み合わせを調べれば分かる。例えば、5 行目を見ると、P、R、S が真で、Q が偽である。このことから、A が大晦日だけ働き、B が大晦日と元日の両方働くシフトは、条件 1〜3 を全て満たすことが分かる。

(1-c) この問題を解くための考え方は、まず、真理値表で条件 1〜4 に対応する論理式が全て真となる行がどれかを調べる。さらに、そのいずれの行においても「B が元日に働くならば、B は大晦日に働かない」という性質が成り立つか否か（つまり、この命題に対応する論理式 $S \Rightarrow \neg R$ が真となるか否か）を調べればよい。

実際に、条件 1〜4 が全て真となる行は 7 行目と 10 行目である。一方、これらのいずれの行でも $S \Rightarrow \neg R$ は真となる。よって、条件 1〜4 を満たすシフトでは、いずれも「B が元日に働くならば、B は大晦日に働かない」という性質が成り立つ。

(1-d) 真理値表において、条件 2〜5 が真となるのは 2 行目と 4 行目である。この 2 つの行の P，Q，R，S の真偽の組み合わせは、それぞれ以下のとおりである。

- 2 行目：P，Q，R が真、S が偽
- 4 行目：P，Q が真、R，S が偽

よって、条件 2〜5 を全て満たすシフトのうち、B が大晦日も元日も働かないようなもの（R と S が共に偽となる組み合わせ）として、真理値表の 2 行目に対応するシフトが存在することが分かる。具体的には、「A が両日働き、B が大晦日だけ働く」シフトである。（なお、答えはこの組み合わせだけで、それ以外には存在しない。）

問 2. (配点 30 点)

(2-a: 配点 5 点) $P(x)$ として $0 \leq x < n$ を取ればよい．すなわち，$\{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < n\}$ が答えである．

なお、$x \in \mathcal{N}$ であれば $0 \leq x$ であるので，$\{x \in \mathcal{N} \mid x < n\}$ と書いてもよい．(正解は一つではない)．

(2-b: 配点 前半 3 点, 後半 3 点) $f(0) = 1$ かつ $f \circ f$ が恒等関数となる f の例 (その 1): $f_1(0) = 1$, $f_1(1) = 0$, および $2 \leq x < 5$ に対して $f_1(x) = x$ となる関数 f_1.

$f(0) = 1$ かつ $f \circ f$ が恒等関数となる f の例 (その 2): $f_2(0) = 1$, $f_2(1) = 0$, $f_2(2) = 3$, $f_2(3) = 2$, $f_2(4) = 4$ となる関数 f_2.

これ以外にも正解は存在する．

f による集合 $\{0, 1, 2\}$ の像: 上記の f_1 を選んだ場合，$f_1(\{0, 1, 2\}) = \{f_1(0)\} \cup \{f_1(1)\} \cup \{f_1(2)\} = \{0, 1, 2\}$ である．上記の f_2 を選んだ場合，$f_2(\{0, 1, 2\}) = \{f_2(0)\} \cup \{f_2(1)\} \cup \{f_2(2)\} = \{0, 1, 3\}$ である．

(2-c: 配点 各 3 点) (i) $f(0) = 1$ となる f の個数: 関数 f は，$f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$ のそれぞれの値が何になるかで決まる．

この問題の場合，$f(0)$ の値は決まっているので，残りの $f(1)$,$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ の 4 つの値の決め方が何過りあるか考える．

$x = 1, 2, 3, 4$ に対して，$f(x)$ の値は，0 から 4 までの 5 通りである．$f(1)$,$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ の 4 つの値は独立に決めることができるので，f の個数は，$5^4 = 625$ 個である．

(ii) $f \circ f$ が恒等関数となる f の個数: $a \neq b$ に対して、$f(a) = b$ ならば $f(b) = a$ でなければいけない。よって、そのような a, b は 2 個ずつセットである。つまり、$f(x) \neq x$ となる $x \in \mathcal{N}_5$ の個数は偶数である。

- そのような x が 0 個のとき、f 自身が恒等関数であり、そのような f は 1 個である。
- そのような x が 2 個のとき、(これは，たとえば，f が 0,1,2,3,4 をそれぞれ 1,0,2,3,4 に対応付ける場合である) そのような f を数え上げよう．

  このような f は，$f(x) \neq x$ となる x をどれにするか決めると，一意的に定まる．よって，5 個の要素から 2 個を取る組合せの数となるので、$5 \cdot 4/2 = 10$ 個ある。
- そのような x が 4 個のとき、(これは，たとえば，f が 0,1,2,3,4 をそれぞれ 1,0,3,2,4 に対応付ける場合である) そのような f を数え上げよう．

  このような f は，まず，$f(x) \neq x$ となる x をどれにするかで 5 通りあり，そのあと，4 個の要素を，2 個ずつ 2 組に分ける組合せの数がある．後者は，3 通りである．(6 通りでないことに注意せよ．)

  よって，そのような f の総数は，$5 \times 3 = 15$ 個となる．

以上を合計して、$1+10+15=26$ 個である．

(iii) 「$f(0)=1$ であるか、または、$f\circ f$ が恒等関数となるような f の個数」は、上記の (i),(ii) の合計数から、「$f(0)=1$ であり、かつ、$f\circ f$ が恒等関数となるような f の個数」を引けばよい。(これは，集合の要素数について，$|S_1\cup S_2|=|S_1|+|S_2|-|S_1\cap S_2|$ が成立することによるが，そのような断りなしに使ってよい．)

「$f(0)=1$ であり、かつ、$f\circ f$ が恒等関数となるような f の個数」を計算する．(ここで，$f(1)=0$ である) 上記の (ii) と同様に考える．

$f(x)\neq x$ となる x が $0,1$ のみのとき、($x=2,3,4$ に対して $f(x)=x$ と一意的に決まるので)、そのような f は 1 個である．

$f(x)\neq x$ となる x が $0,1$ 以外にもう 1 組 (2 個) あるとき、(たとえば f が 0,1,2,3,4 を 1,0,3,2,4 に対応付けるときである)，そのような f は，$x=f(x)$ となる x を 2,3,4 のうちどれにするか，という選び方の数だけ存在し，これは，3 個である．

上記を合計して,「$f(0)=1$ であり、かつ、$f\circ f$ が恒等関数となるような f の個数」は，4 個である．

最終的に，本問の条件を満たす f の個数は，$625+26-4=647$ 個となる。

(2-d: 配点 10 点、両方やった場合は追加点 5 点)

(2-d-1) 任意の集合 S_1,S_2,S_3 に対して、$(S_1-S_2)\cup S_3\subset(S_1\cup S_3)-(S_2-S_3)$ を証明せよ。

証明: ($S\subset T$ の証明をするためには，任意の $x\in S$ を取って，$x\in T$ を導けばよいことに注意せよ．)

任意の $x\in(S_1-S_2)\cup S_3$ を取る。和集合 $\cup$ の性質より，$x\in S_1-S_2$ または $x\in S_3$ となる。そこで場合分けをする．

(Case 1: $x\in S_1-S_2$ のとき) 差集合 $-$ の性質より，$x\in S_1$ かつ $x\notin S_2$ である。よって、$x\in S_1\cup S_3$ である．

もし、$x\in S_2-S_3$ ならば $x\in S_2$ となって $x\notin S_2$ に矛盾するので、$x\notin S_2-S_3$ である。

以上の 2 つを合わせて，$x\in((S_1\cup S_3)-(S_2-S_3))$ である．

(Case 2: $x\in S_3$ のとき) このとき，$x\in S_1\cup S_3$ である。

もし、$x\in S_2-S_3$ ならば $x\in S_2$ かつ $x\notin S_3$ であるが、後者は $x\in S_3$ に矛盾するので、$x\notin S_2-S_3$ である。

以上の 2 つを合わせて，$x\in((S_1\cup S_3)-(S_2-S_3))$ となる。

以上どちらの場合も、$x\in((S_1\cup S_3)-(S_2-S_3))$ である．

よって，$(S_1-S_2)\cup S_3\subset(S_1\cup S_3)-(S_2-S_3)$ を導けた．

[補足] 本問は,「左辺 $\subset$ 右辺」を証明したが，実は,「左辺 $\supset$ 右辺」も成立し，本問の 2 つの集合は同じ集合である．余力がある人は,「左辺 $\supset$ 右辺」も証明してみてほしい．

(2-d-2) 関数 $f_1:\mathcal{N}_5\to\mathcal{N}_7$, $f_2:\mathcal{N}_7\to\mathcal{N}_{10}$、$f_3:\mathcal{N}_{10}\to\mathcal{N}_5$ に対して、もし、$f_3\circ(f_2\circ f_1)$ が単射であれば f_1 は単射であることを示しなさい。

証明: (関数 $g:S\to T$ が単射であることを証明するには,「任意の $x,y\in S$ に対して $g(x)=g(y)$ ならば $x=y$」 を示せばよい事に注意せよ。)

f_1 が単射であることを証明するために、$x,y\in\mathcal{N}_5$ に対して、$f_1(x)=f_1(y)$ と仮定する．

$f_1(x)=f_1(y)$ より、$f_2(f_1(x))=f_2(f_1(y))$ である。これより、$f_3(f_2(f_1(x)))=f_3(f_2(f_1(y)))$ となる。

合成関数の定義より、$(f_3\circ(f_2\circ f_1))(x)=f_3((f_2\circ f_1)(x))=f_3(f_2(f_1(x)))$ であるので、$(f_3\circ(f_2\circ f_1))(x)=(f_3\circ(f_2\circ f_1))(y)$ となる。

一方、$f_3\circ(f_2\circ f_1)$ は単射なので、「$(f_3\circ(f_2\circ f_1))(x)=(f_3\circ(f_2\circ f_1))(y)$ ならば $x=y$」が成立する．よって，$x=y$ である。

以上より、「任意の $x,y\in S$ に対して $f_1(x)=f_1(y)$ ならば $x=y$」 を示せたので、f_1 は単射である。

別の証明: (問題文の対偶を取って,「f_1 が単射でなければ, $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ が単射でない」を証明する．関数 $g : S \to T$ が単射でない，というのは,「$g(x) = g(y)$ かつ $x \neq y$ となる $x, y \in S$ が存在する」ことである．)

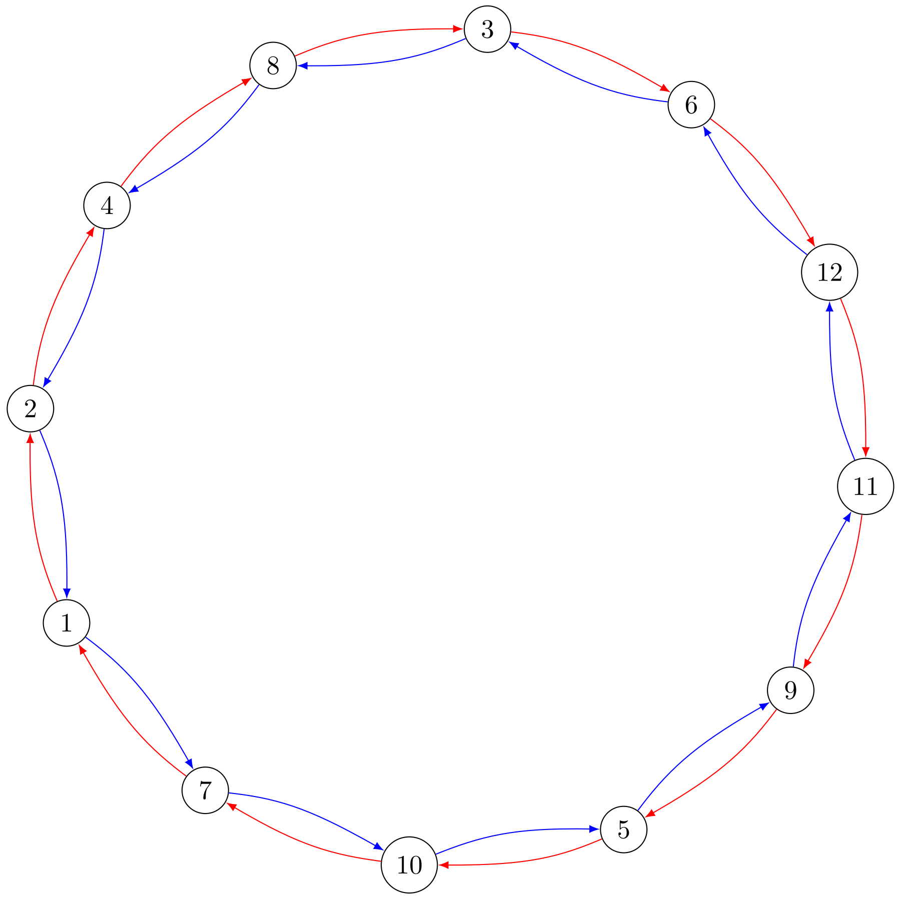
f_1 が単射でないので，$f_1(x) = f_1(y)$ かつ $x \neq y$ となる $x, y \in \mathcal{N}_5$ が存在する．$f_1(x) = f_1(y)$ ということから，(両辺に f_2 を適用して) $f_2(f_1(x)) = f_2(f_1(y))$ である．さらに，両辺に f_3 を適用して $f_3(f_2(f_1(x))) = f_3(f_2(f_1(y)))$ である．

よって，$(f_3 \circ (f_2 \circ f_1))(x)) = (f_3 \circ (f_2 \circ f_1))(y))$ かつ，$x \neq y$ となる $x, y \in \mathcal{N}_5$ が存在することになり，$(f_3 \circ (f_2 \circ f_1))$ は単射でない．

以上より、「f_1 が単射でなければ，$f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ が単射でない」が言えたので，その対偶である「$f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ が単射であれば，f_1 が単射である」が言えた．

問 3. **(配点 30 点)**

(3-a) 有向グラフ G を図示すると以下のようになる。



(3-b) 有向グラフ G の頂点の数は 12, 辺の数は 24 である。最も長い単純道のひとつは

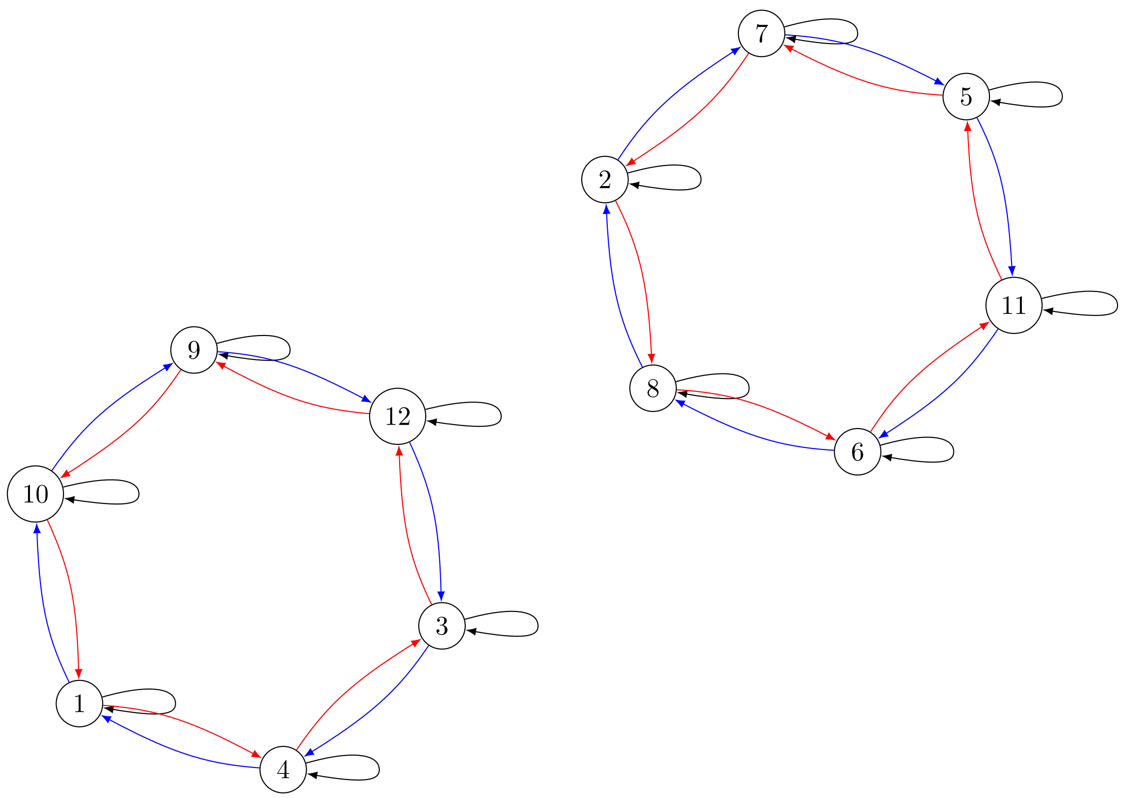
$$\langle 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7, 1, 2, 1, 7, 10, 5, 9, 11, 12, 6, 3, 8, 4, 2 \rangle$$

であり、その長さは 24 である。

(3-c) 頂点 1 を始点とし、同じく頂点 1 を終点とする単純道で長さが 4 であるものは、$\langle 1, 2, 4, 2, 1 \rangle$, $\langle 1, 7, 10, 7, 1 \rangle$, $\langle 1, 2, 1, 7, 1 \rangle$, $\langle 1, 7, 1, 2, 1 \rangle$ の 4 つ存在する。

(3-d) 2 項関係 R は、任意の $x, y \in V$ について、$x \ R \ y$ ならば $y \ R \ x$ が成り立つので対称的である。$\langle 2, 4 \rangle \in R$ かつ $\langle 4, 8 \rangle \in R$ だが $\langle 2, 8 \rangle \notin R$ なので推移的でない。

2 項関係 $R \circ R$ を辺として持つグラフを図示すると以下のようになる。



任意の $x \in V$ について、$x\ (R \circ R)\ x$ が成り立つので反射的である。$\langle 2, 8 \rangle \in R$ かつ $\langle 8, 2 \rangle \in R$ だが $2 \neq 8$ なので反対称的でない。

(3-e) 有向グラフ G の任意の頂点 x について x から x への道が存在するので、2 項関係 S は反射的である。x から y への道が存在し、y から z への道が存在するならば、x から z への道が存在するので、S は推移的である。x から y への道が存在すれば、R が対称的であるため、y から x への道も存在するので S は対称的である。$\langle 2, 4 \rangle \in S$ かつ $\langle 4, 2 \rangle \in S$ だが $2 \neq 4$ なので S は反対称的である。したがって、S は同値関係であるが、半順序ではない。

問 4. (配点 20 点)

(4-a) 答えは以下の通り。

- $\langle 2 \rangle$ は S の要素である。
- L が S の要素で、$head(L) = 2$ ならば、$\mathrm{cons}(0, L)$ および $\mathrm{cons}(1, L)$ はそれぞれ S の要素である。
- L が S の要素で、$head(L) = 0$ ならば、$\mathrm{cons}(1, L)$ は S の要素である。
- L が S の要素で、$head(L) = 1$ ならば、$\mathrm{cons}(0, L)$ は S の要素である。

(4-b) 答えは以下の通り。

$$del(L) = \begin{cases} \langle\ \rangle & (L = \langle\ \rangle) \\ del(L') & (L = cons(1, L')) \\ cons(x, del(L')) & (L = cons(x, L') \text{ かつ } x \neq 1) \end{cases}$$

(4-c) 答えは以下の通り。

$$\begin{aligned} f(\langle 1,2,0,1,2\rangle) &= \texttt{[}f(\langle 2,0,1,2\rangle)\texttt{x]} \\ &= \texttt{[d}f(\langle 0,1,2\rangle)\texttt{x]} \\ &= \texttt{[d}f(\langle 1,2\rangle)\texttt{x]} \\ &= \texttt{[d[}f(\langle 2\rangle)\texttt{x]x]} \\ &= \texttt{[d[d}f(\langle\ \rangle)\texttt{x]x]} \\ &= \texttt{[d[d0x]x]} \end{aligned}$$

(4-d) 答えは以下の通り。ここで、g_k の定義より、「$\times 2$」や「$+k$」は、左の内側から順に一つずつ追加されることに注意すること。従って、$g_k(e)$ が base case まで分解された後に残る式は、0 を起点として左から右に一つずつ「$\times 2$」と「$+k$」が結合した形になる。そのことを強調するため、以下の計算過程ではカッコを付けている。

$$\begin{aligned} g_3(\texttt{[dd[0x]x]}) &= g_3(\texttt{dd[0x]}) + 3 \\ &= (g_3(\texttt{d[0x]}) \times 2) + 3 \\ &= (g_3(\texttt{d[0x]}) \times 2) + 3 \\ &= ((g_3(\texttt{[0x]}) \times 2) \times 2) + 3 \\ &= (((g_3(\texttt{0}) + 3) \times 2) \times 2) + 3 \\ &= (((0 + 3) \times 2) \times 2) + 3 \\ &= 15 \end{aligned}$$

(4-e) 証明：$L \in List_A$ に関する帰納法により示す。

- Base case（$L = \langle\ \rangle$ のとき）:
  f および g_k の定義より、$g_k(f(\langle\ \rangle)) = g_k(\texttt{0}) = 0$ となるので明らか。
- Induction step 1（$L = \mathrm{cons}(0, L')$ のとき）:
  f の定義より、$g_k(f(\mathrm{cons}(0, L'))) = g_k(f(L'))$。帰納法の仮定より、$g_k(f(L'))$ は偶数であるから、$g_k(f(\mathrm{cons}(0, L')))$ も偶数である。
- Induction step 2（$L = \mathrm{cons}(1, L')$ のとき）:
  f および g_k の定義より、$g_k(f(\mathrm{cons}(1, L'))) = g_k(\texttt{[}f(L')\texttt{x]}) = g_k(f(L')) + k$。帰納法の仮定より $g_k(f(L'))$ は偶数であり、また、仮定より k は偶数である。従って、$g_k(f(\mathrm{cons}(1, L')))$ は偶数である。
- Induction step 3（$L = \mathrm{cons}(2, L')$ のとき）:
  f および g_k の定義より、$g_k(f(\mathrm{cons}(2, L'))) = g_k(\texttt{d}f(L')) = g_k(f(L')) \times 2$。帰納法の仮定より、$g_k(f(L'))$ は偶数であるから、$g_k(f(\mathrm{cons}(2, L')))$ は偶数である。

以上により、任意の偶数 $k \in \mathcal{N}$ と任意の $L \in List_A$ に対して、$g_k(f(L))$ は偶数となることが示された。

（証明終）