離散構造 期末試験 解答例, 試験実地日: 2013年12月20日 (金)

問 1. (配点 20 点)

太郎君と二郎君は、新年度から引っ越しをして2人でルームシェアをすることになった。ある日、2人で不動産屋に行き、以下のような5つの希望を店員に伝えた。

- 希望1：家賃が8万円以上でかつ床が全て畳（フローリングでない)、ということはない。
- 希望2：風呂・トイレがユニットバスで駐車場が付いていないなら、家賃は8万円未満である。
- 希望3： 床が畳なら、風呂・トイレは別（ユニットバスではない）である。
- 希望4： 家賃が8万円以上かユニットバスであるかの少なくとも一方である場合は、駐車場が付いている。
- 希望5： 家賃が8万円未満で、なおかつ駐車場が付いている。

すると、店員は以下の物件(A)から(D)が空いていると言った。

	物件 (A)	物件 (B)	物件 (C)	物件 (D)
家賃	7万円	3万円	12万円	9万円
風呂・トイレ	ユニットバス	ユニットバス	別	別
駐車場	付	無	付	無
床	畳	畳	フローリング	フローリング

このとき、以下の問いに答えよ。

(1-a) 次の原子文 P、Q、R、S を使って、上記の希望1から5をそれぞれ命題論理の論理式を使って表現せよ。

- P：家賃が8万円以上である。
- Q：風呂・トイレがユニットバスである。
- R：駐車場が付いている。
- S：床がフローリングである。

答. 希望1から5はそれぞれ以下の論理式として表現できる。なお、これらと同値な論理式を書いても正答である。また、論理記号の結合力の強さ ($\neg$ が最強、$\wedge$ がその次、$\vee$ がその次、$\Rightarrow$ が最も弱い) に応じて括弧を適宜省略したものも正答である。

希望1 $\neg(P \wedge (\neg S))$

希望2 $(Q \wedge (\neg R)) \Rightarrow (\neg P)$

希望3 $(\neg S) \Rightarrow (\neg Q)$

希望4 $(P \vee Q) \Rightarrow R$

希望5 $(\neg P) \wedge R$

(1-b) 店員は、希望2を聞いたとき、「そのご希望はつまり、“風呂・トイレがユニットバスでないか、駐車場が付いているか、家賃が8万円未満かの少なくともいずれか1つが満たされている” ということですね」と言った。この言い換えが正しいかどうか（つまり希望2と店員による言い換えた文とが同値の関係であるかどうか)、理由をつけて答えよ。

答. 言い換えた文を論理式で表すと $(\neg Q) \vee R \vee (\neg P)$ となる。

真理値表を書くことにより、言い換えた論理式は、希望2を表す論理式 $(Q \wedge (\neg R)) \Rightarrow (\neg P)$ と同値であるので、この言い換えは正しい。

P	Q	R	$(\neg Q) \vee R \vee (\neg P)$	$Q \wedge (\neg R)$	$(Q \wedge (\neg R)) \Rightarrow (\neg P)$
T	T	T	T	F	T
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	F	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T
F	F	F	T	F	T

別解: $A \Rightarrow B$ は $(\neg A) \vee B$ と同値であるので、希望2の論理式は、$(\neg(Q \wedge (\neg R))) \vee (\neg P)$ と同値である。さらにド・モルガンの法則 (のうちの1つ: $(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$) を使うと、これは、$((\neg Q) \vee (\neg(\neg R))) \vee (\neg P)$ と同値である。$(\neg\neg A) \Leftrightarrow A$ を使うと、これは、言い換えた文と同値である。

(1-c) 上の A から D の中から、希望 1、2、3 を全て満たす（希望 4 と 5 は満たさなくてもよい）ものを全て挙げよ。

答. A,B,C,D について成り立つ論理式を P, Q, R, S を使って表すと以下のようになる。

A $\neg P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S$

B $\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge \neg S$

C $P \wedge \neg Q \wedge R \wedge S$

D $P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge S$

物件 A,B,C,D のそれぞれに対して、論理式を P, Q, R, S が真か偽かを調べると以下の表の左半分のようになる。それぞれのケースで、希望 1 から 5 の論理式の真理値を計算したものを、以下の表の右半分に示す。

物件	P	Q	R	S	希望 1	希望 2	希望 3	希望 4	希望 5
A	F	T	T	F	T	T	F	T	T
B	F	T	F	F	T	T	F	F	F
C	T	F	T	T	T	T	T	T	F
D	T	F	F	T	T	T	T	F	F

この表から、希望 1,2,3 を全て満たすのは物件 C と D であることがわかる。

(1-d) 物件 C は希望 1 から 5 の全てを満たしてはいない。5 つの希望の中からどれか 1 つの希望をあきらめれば、物件 C は残りの全ての希望を満たせるか。もしそうであれば、あきらめるべき希望を 1 つ、理由をつけて挙げよ。そうでなければ、その理由を述べよ。

答. 前問で作成した真理値表から、C は希望 5 をあきらめれば、残りのすべての希望を満たせることがわかる。

(1-e) 店員は、物件 A について「もしも入居してくれるのなら、家賃と駐車場はそのままで、ユニットバスを風呂・トイレ別に改装するか、あるいは床をフローリングに改装します」と言った。この改装により、物件 A は希望 1 から 5 を全て満たせるか。理由をつけて答えよ。（ただし、この提案条件はこの問いだけに適用されるものとし、問題 (1-c) には適用されないものとする。）

答. 改装前の物件 A は、論理式 P, Q, R, S の真理値が、それぞれ、F,T,T,F であった。ユニットバスを風呂・トイレ別に改装した場合、F,F,T,F となり (これを A$'$ とする)、床をフローリングに改装した場合、F,T,T,T となる (これを A$''$ とする)。これらに対して希望 1 から 5 の真理値を計算すると以下のようになる。

物件	P	Q	R	S	希望 1	希望 2	希望 3	希望 4	希望 5
A$'$	F	F	T	F	T	T	T	T	T
A$''$	F	T	T	T	T	T	T	T	T

よって、この改装により (どちらの改装であっても)、希望 1 から 5 を全て満たせる。

問 2. (配点 30 点)

(2-a) $\mathcal{Z}$ を全ての整数からなる集合とし、関数 $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ を $f(x) = x^2 + 1$ と定める。関数 f による集合 A の像を $f(A)$ と書く。たとえば、$f(\{1, 2, -3\}) = \{2, 5, 10\}$ である。

以下の命題が成立するかどうか調べよ。(成立する場合はその根拠を述べ、成立するとは限らない場合は具体的な反例を 1 つ与えよ。)

(2-a-1) すべての $A \subset \mathcal{Z}$ と $B \subset \mathcal{Z}$ に対して $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ である。

答: 成立するので、証明する。ここでは、定義に従って、$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ と $f(A) \cup (B) \subset f(A \cup B)$ の 2 つを証明することにする。

(前半の証明) $y \in f(A \cup B)$ と仮定する。関数の像の定義により、$y = f(x)$ となる $x \in A \cup B$ が存在する。和集合の定義により、$x \in A$ または $x \in B$ である。$x \in A$ ならば、$y = f(x) \in f(A)$ となり、$x \in B$ ならば、$y = f(x) \in f(B)$ となり、いずれにしても $y \in (f(A) \cup f(B))$ となる。よって、$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ が証明できた。

(後半の証明) $y \in f(A) \cup f(B)$ と仮定する。$y \in f(A)$ または $y \in f(B))$ となる。

$y \in f(A)$ ならば、$y = f(x)$ となる $x \in A$ が存在する。$x \in A \cup B$ なので、$y \in f(A \cup B)$ である。$y \in f(B)$ のときも同様に、$y \in f(A \cup B)$ が言える。よって、$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ が証明できた。

別の答: 上記の証明をスマートにすると、以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned} f(A \cup B) &= \{f(x) \mid x \in A \cup B\} \\ &= \{f(x) \mid x \in A \vee x \in B\} \\ &= \{f(x) \mid x \in A\} \cup \{f(x) \mid x \in B\} \\ &= f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

(2-a-2) すべての $A \subset \mathcal{Z}$ と $B \subset \mathcal{Z}$ に対して $f(A - B) = f(A) - f(B)$ である。

答. 成立しないので、反例を与える。$A = \{1\}$, $B = \{-1\}$ とする。$f(A - B) = f(\{1\}) = \{2\}$ であるが、$f(A) - f(B) = \{2\} - \{2\} = \emptyset$ となるため、$f(A - B) = f(A) - f(B)$ は成り立たない。

(2-b) $\mathcal{N}_k = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \le x < k\}$ とする。($0 \in \mathcal{N}_k$ であること、また、$k \notin \mathcal{N}_k$ であることに注意せよ。)

$i = 1, 2$ に対して関数 $f_i : \mathcal{N}_{225} \to \mathcal{N}_{15}$ を

$$f_1(x) = x \;\texttt{mod}\; 15$$
$$f_2(x) = x \;\texttt{div}\; 15$$

により定義する。ただし、自然数 m と 1 以上の自然数 n に対して、$m \;\texttt{mod}\; n$ は m を n で割った余りを表し、$m \;\texttt{div}\; n$ は m を n で割った整数上の商 (小数点以下を切り捨てた割り算の答) を表す。たとえば、$f_1(153) = 3$, $f_2(153) = 10$ である。このとき、以下の問に答えなさい。

(2-b-1) 関数 $h : \mathcal{N}_{15} \to \mathcal{N}_{225}$ を $h(x) = x^2$ により定義する。h と $f_1 \circ h$ と $f_2 \circ h$ のうち、単射であるものをすべて示しなさい。(それぞれ、簡単に根拠を述べなさい。)

答. $\forall x, y \in \mathcal{N}_{15} (x \neq y \Rightarrow x^2 \neq y^2)$ が成り立つので h は単射である。$(f_1 \circ h)(1) = f_1(1) = 1$ だが $(f_1 \circ h)(4) = f_1(16) = 1$ なので $f_1 \circ h$ は単射でない。また、$(f_2 \circ h)(0) = f_2(0) = 0$ だが $(f_2 \circ h)(1) = f_2(1) = 0$ なので $f_2 \circ h$ も単射でない。

参考のため、すべての引数 $x \in \mathcal{N}_{15}$ について、$f_1 \circ h$ と $f_2 \circ h$ をそれぞれ計算したものを以下に載せる。

- $(f_1 \circ h)(0) = f_1(0) = 0$, $(f_2 \circ h)(0) = f_2(0) = 0$
- $(f_1 \circ h)(1) = f_1(1) = 1$, $(f_2 \circ h)(1) = f_2(1) = 0$
- $(f_1 \circ h)(2) = f_1(4) = 4$, $(f_2 \circ h)(2) = f_2(4) = 0$

- $(f_1 \circ h)(3) = f_1(9) = 9$, $(f_2 \circ h)(3) = f_2(9) = 0$
- $(f_1 \circ h)(4) = f_1(16) = 1$, $(f_2 \circ h)(4) = f_2(16) = 1$
- $(f_1 \circ h)(5) = f_1(25) = 10$, $(f_2 \circ h)(5) = f_2(25) = 1$
- $(f_1 \circ h)(6) = f_1(36) = 6$, $(f_2 \circ h)(6) = f_2(36) = 2$
- $(f_1 \circ h)(7) = f_1(49) = 4$, $(f_2 \circ h)(7) = f_2(49) = 3$
- $(f_1 \circ h)(8) = f_1(64) = 4$, $(f_2 \circ h)(8) = f_2(64) = 4$
- $(f_1 \circ h)(9) = f_1(81) = 6$, $(f_2 \circ h)(9) = f_2(81) = 5$
- $(f_1 \circ h)(10) = f_1(100) = 10$, $(f_2 \circ h)(10) = f_2(100) = 6$
- $(f_1 \circ h)(11) = f_1(121) = 1$, $(f_2 \circ h)(11) = f_2(121) = 8$
- $(f_1 \circ h)(12) = f_1(144) = 9$, $(f_2 \circ h)(12) = f_2(144) = 9$
- $(f_1 \circ h)(13) = f_1(169) = 4$, $(f_2 \circ h)(13) = f_2(169) = 11$
- $(f_1 \circ h)(14) = f_1(196) = 1$, $(f_2 \circ h)(14) = f_2(196) = 13$

(2-b-2) $k : \mathcal{N}_{225} \to (\mathcal{N}_{15} \times \mathcal{N}_{15})$ となる関数 k のうち、全単射となるものを 1 つ示しなさい。(簡単に根拠を述べなさい。)

答. $k(x) = \langle f_1(x), f_2(x) \rangle$ は全単射である。なぜなら、関数 $h : (\mathcal{N}_{15} \times \mathcal{N}_{15}) \to \mathcal{N}_{225}$ を $h(x, y) = x + 15 \cdot y$ と定義すると h は k の逆関数であるから。

(2-b-3) 関数 $g_i : \mathcal{N}_{1000} \to \mathcal{N}_{15}$ (ただし $i = 1, 2$) を、$g_1(x) = x \texttt{ mod } 7$、$g_2(x) = x \texttt{ mod } 13$ により定義すると、$f_1 \circ j = g_1$ かつ $f_2 \circ j = g_2$ となる関数 $j : \mathcal{N}_{1000} \to \mathcal{N}_{225}$ が存在する。そのような関数 j を具体的に示しなさい。(j が複数ある場合は、そのうちの 1 つを示しなさい。)

答. $j(x) = x \texttt{ mod } 7 + 15 \cdot (x \texttt{ mod } 13)$ と置くと、$f_1 \circ j = g_1$ かつ $f_2 \circ j = g_2$ を満たすことが容易にわかる。

(2-b-4) 関数 $g_i : \mathcal{N}_{1000} \to \mathcal{N}_{15}$ (ただし $i = 1, 2$) が与えられたとする。このとき、(どんな関数 g_1, g_2 であっても) $f_1 \circ j = g_1$ かつ $f_2 \circ j = g_2$ となる関数 $j : \mathcal{N}_{1000} \to \mathcal{N}_{225}$ が存在することを示しなさい。(加点問題: もし余力があれば、そのような関数 j がただ 1 つ存在することを示しなさい。)

答. $j(x) = g_1(x) + 15 \cdot g_2(x)$ と置くと題意をみたす。

加点問題の答. 関数 $i : \mathcal{N}_{1000} \to \mathcal{N}_{225}$ が、$f_1 \circ i = g_1$ かつ $f_2 \circ i = g_2$ を満たすと仮定する。すると、(2-b-2) の関数 k を用いて、$k(i(x)) = \langle f_1(i(x)), f_2(i(x)) \rangle = \langle g_1(x), g_2(x) \rangle$ となる。さらに、(2-b-2) の関数 h(これは k の逆関数 k^{-1} のことである) を用いて、

$$\begin{aligned} i(x) &= (h \circ k)(i(x)) = h(k(i(x))) \\ &= h(\langle g_1(x), g_2(x) \rangle) = g_1(x) + 15 \cdot g_2(x) \end{aligned}$$

となり、この関数しかないことが言える。

問 2 の意図. 本問は、離散構造の範囲の知識があれば解ける問題であるが、本問の主題は「カテゴリ (圏論、Category Theory)」における積 (product) である。カテゴリの世界は、集合たちとその間の関数たちを一般化 (抽象化) した世界であり、関数、関数の合成、恒等関数、全射、単射などの概念はあるが、「集合の要素」という概念がない世界である。そんな世界でどうやって「積」(直積集合に相当するもの) を定義できるか、と不思議なところであるが、カテゴリの世界では問題 (2-b-4) の性質を満たすものを積と言う。(図 1 参照)。

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[d, dashed, "j"] \arrow[dr, "g_2"] & \\ A \arrow[r, phantom, ""] & A \times B \arrow[l, "f_1"] \arrow[r, "f_2"'] & B \end{tikzcd}$$

図 1: カテゴリの積 $A \times B$: 任意の C, g_1, g_2 に対して、図の条件を満たす j が唯一存在

問 3. (配点 30 点)

集合 $A = \{1, 2, 3\}$ とし、A のべき集合 $2^A = \{X \mid X \subset A\}$ 上の 2 項関係 $R \subset 2^A \times 2^A$ を以下のように定める。

$$X\ R\ Y \Leftrightarrow X \subset Y \land \#Y = \#X + 1$$

ここで、$\#X$ は集合 X の要素数を表す。

(3-a) 2^A を頂点の集合、R を辺の集合として持つ有向グラフを以後 G と呼ぶ。有向グラフ G を図示しなさい。ただし、辺の向きと各頂点に対応する 2^A の要素が、図からはっきり読み取れるようにすること。

答.

$$\begin{tikzcd}
 & \emptyset \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\{1\} \arrow[d] \arrow[dr] & \{2\} \arrow[dl] \arrow[dr] & \{3\} \arrow[dl] \arrow[d] \\
\{1,2\} \arrow[dr] & \{1,3\} \arrow[d] & \{2,3\} \arrow[dl] \\
 & \{1,2,3\} &
\end{tikzcd}$$

(3-b) 有向グラフ G の頂点の数と辺の数をそれぞれ答えよ。

答. 頂点は 8 個、辺は 12 本である。

(3-c) 有向グラフ G の、長さ 3 の単純道 (同じ辺を 2 回以上通らない道) の数を答えよ。

答. $3 \cdot 2 = 6$ 個である。

(3-d) 2^A 上の 2 項関係 S を以下のように定める。

$$S = \{\langle X, X\rangle \mid X \in 2^A\} \cup R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R)$$

$S \circ R \subset S$ が成立するかどうか理由とともに答えよ。

答. $R^n = \{\langle X, Y\rangle \mid X \subset Y \land \#(Y - X) = n\}$ であり、$S = \{\langle X, Y\rangle \mid X \subset Y \land 0 \leq \#(Y - X) \leq 3\}$ と表すことができる。したがって、$S \circ R = \{\langle X, Y\rangle \mid X \subset Y \land 1 \leq \#(Y - X) \leq 4\}$ であるが、任意の $Y, X \in 2^A$ について $\#(Y - X) \leq 3$ が成り立つので、$S \circ R = \{\langle X, Y\rangle \mid X \subset Y \land 1 \leq \#(Y - X) \leq 3\} \subset S$ である。

(3-e) S が順序 (半順序ともいう) であるか、また同値関係であるか、それぞれ理由とともに答えよ。

答. $\{\langle X, X\rangle \mid X \in 2^A\} \subset S$ なので S は反射的である。

$\emptyset\ S\ \{1\}$ だが $\{1\}\ S\ \emptyset$ なので対称的ではない。

$X \in 2^A, Y \in 2^A, Z \in 2^A$ について、$X\ S\ Z$ かつ $Z\ S\ Y$ だと仮定する。S の定義より、$X \subset Z$ かつ $Z \subset Y$ かつ $0 \leq \#(Z - X) \leq 3$ かつ $0 \leq \#(Y - Z) \leq 3$ である。したがって、$X \subset Y$ かつ $0 \leq \#(Y - X) \leq 3$ なので、$X\ S\ Y$ が成り立つ。よって、S は推移的である。

$X \in 2^A, Y \in 2^A$ について、$X\ S\ Y$ かつ $Y\ S\ X$ だと仮定する。S の定義より、$X \subset Y$ かつ $Y \subset X$ である。したがって、$X = Y$ なので、S は反対称的である。

以上より、S は順序であるが、同値関係ではない。

問 4. (配点 20 点)

自然数の集合を $\mathcal{N}$ とする。$\Sigma = \{1, 2, +, \times, (,)\}$ 上の文字列の集合 S を、以下の帰納的定義によって与える。(なお、以下で S の要素を「...」で囲むことにより、説明文と区別する。)

- 「1」、「2」はそれぞれ S の要素である。

- s が S の要素で、n が「1」か「2」であるならば、「$(s+n)$」は S の要素である。
- s が S の要素であれば、「$1 \times s$」は S の要素である。

このとき、以下の問いに答えよ。

(4-a) 文字列「$(1 \times 1 \times (2+1)+2)$」は S の要素であるかどうか、理由を付けて答えよ。

答.「2」は S の要素である。したがって、「$(2+1)$」は S の要素である。すると、「$1 \times (2+1)$」が S の要素であることが分かり、「$1 \times 1 \times (2+1)$」も S の要素であることがいえる。最後に「$(1 \times 1 \times (2+1)+2)$」も S の要素であることがいえる。

(4-b) 文字列 $s \in S$ に出現する「+」の個数と「×」の個数の和を計算する関数 $count : S \to \mathcal{N}$ を帰納的に定義せよ。（ここで意図する関数は、例えば $count((1 \times (1+2)+1)) = 3$ となるものである。）

答.

$$count(s) = \begin{cases} 0 & (\text{if } s = \text{「}1\text{」}) \\ 0 & (\text{if } s = \text{「}2\text{」}) \\ 1 + count(t) & (\text{if } s = \text{「}(t+n)\text{」}) \\ 1 + count(t) & (\text{if } s = \text{「}1 \times t\text{」}) \end{cases}$$

次に、関数 $f : S \to List_{\mathcal{N}}$ と関数 $g : List_{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$ を、以下のように帰納的に定義する。

$$f(s) = \begin{cases} \langle 1 \rangle & (\text{if } s = \text{「}1\text{」}) \\ \langle 2 \rangle & (\text{if } s = \text{「}2\text{」}) \\ \text{cons}(n, f(t)) & (\text{if } s = \text{「}(t+n)\text{」}) \\ f(s') & (\text{if } s = \text{「}1 \times s'\text{」}) \end{cases}$$

$$g(L) = \begin{cases} 0 & (\text{if } L = \langle\ \rangle) \\ g(L') + n & (\text{if } L = \text{cons}(n, L')) \end{cases}$$

ここで、$\langle 2 \rangle$ は $\text{cons}(2, \langle\ \rangle)$ というリストをあらわし、$\langle\ \rangle$ は空リストをあらわす。

(4-c) $f((1 \times ((2+1)+2)+1))$ を、f の定義に従って計算せよ。ただし、計算の過程も明記すること。

答.

$$\begin{aligned} f((1 \times ((2+1)+2)+1)) &= \text{cons}(1, f(1 \times ((2+1)+2))) \\ &= \text{cons}(1, f(((2+1)+2))) \\ &= \text{cons}(1, \text{cons}(2, f((2+1)))) \\ &= \text{cons}(1, \text{cons}(2, \text{cons}(1, f(2)))) \\ &= \text{cons}(1, \text{cons}(2, \text{cons}(1, \langle 2 \rangle))) \end{aligned}$$

(4-d) $g(\text{cons}(1, \text{cons}(2, \text{cons}(1, \langle\ \rangle))))$ を、g の定義に従って計算せよ。ただし、計算の過程も明記すること。

答.

$$\begin{aligned} g(\text{cons}(1, \text{cons}(2, \text{cons}(1, \langle\ \rangle)))) &= g(\text{cons}(2, \text{cons}(1, \langle\ \rangle))) + 1 \\ &= g(\text{cons}(1, \langle\ \rangle)) + 2 + 1 \\ &= g(\langle\ \rangle) + 1 + 2 + 1 \\ &= 0 + 1 + 2 + 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

(4-e) ここで関数 $calc : S \to \mathcal{N}$ を帰納的に定義する。

$$calc(s) = \begin{cases} 1 & (\text{if } s = 「1」) \\ 2 & (\text{if } s = 「2」) \\ calc(t) + n & (\text{if } s = 「(t+n)」) \\ calc(t) & (\text{if } s = 「1 \times t」) \end{cases}$$

つまり $calc$ は、S の要素 s を数式と見なしたときに、s を計算して得られた結果を返す関数である。

この $calc$ と、先に定義した f と g に対して、「任意の $s \in S$ について、$calc(s) = g(f(s))$ が成り立つ」ことを、s に関する帰納法により証明せよ。

答.

- case $s =$「n」$(n = 1, 2)$:

$$(\text{左辺}) = calc(「n」) \quad = \quad n \quad (\text{calcの定義による})$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) = g(f(「n」)) &= g(\langle n \rangle) && (\text{fの定義による}) \\ &= g(\langle\rangle) + n && (\text{gの定義による}) \\ &= 0 + n && (\text{gの定義による}) \\ &= (\text{左辺}) \end{aligned}$$

- case $s =$「$(t+n)$」$(n = 1, 2)$: 帰納法の仮定より、$calc(t) = g(f(t))$ である。

$$(\text{左辺}) = calc(「(t+n)」) \quad = \quad calc(t) + n \quad (\text{calcの定義による})$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) = g(f(「(t+n)」)) &= g(\mathrm{cons}(n, f(t))) && (\text{fの定義による}) \\ &= g(f(t)) + n && (\text{gの定義による}) \\ &= calc(t) + n && (\text{帰納法の仮定による}) \\ &= (\text{左辺}) \end{aligned}$$

- case $s =$「$1 \times t$」: 帰納法の仮定より、$calc(t) = g(f(t))$ である。

$$(\text{左辺}) = calc(「1 \times t」) \quad = \quad calc(t) \quad (\text{calcの定義による})$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) = g(f(「1 \times t」)) &= g(f(t)) && (\text{fの定義による}) \\ &= calc(t) && (\text{帰納法の仮定による}) \\ &= (\text{左辺}) \end{aligned}$$

以上より、任意の $s \in S$ について、$calc(s) = g(f(s))$ が成り立つことが証明できた。(証明終わり)