『離散構造』 3章 グラフの例題(の一部)の解答例

例題 1 (グラフと二項関係)

二項関係は、それを図形で表現することにより、有向グラフと見なせる。すなわち，集合 A 上の二項関係 R があれば，頂点の集合を A とし，辺の集合を R とする有向グラフが考えられる．逆に，有向グラフがあれば，それに対応する二項関係を考えることができる．

例えば，講義資料 35 ページの例 76 の有向グラフは，集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 上の二項関係 R として，以下のように定義できる．

$$R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$$

集合 $V = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 < x < 10\}$ 上の二項関係として以下のものを考えるとき，それぞれに対応する有向グラフを図示せよ．

$R_1 = \{\langle x, y\rangle \in V \times V \mid x \leq y\}$

$R_2 = \{\langle x, y\rangle \in V \times V \mid (x - 5.5)(y - 5.5) < 0\}$

$R_3 = \{\langle x, y\rangle \in V \times V \mid (x - y)$ は 3 で割り切れる $\}$

また、それぞれのグラフのサイズ、位数、強連結成分の数を答えよ。ただし、強連結成分というのは、「部分グラフのうち、強連結なもの」であり、「強連結なグラフ」とは、「どの 2 つの頂点 x,y に対しても、x から y への道も y から x への道もあるグラフ」である。

(答: 図示は省略; 後半のみ)

R_1 に対応するグラフは、$1 \leq x \leq y \leq 9$ となる x から y への辺がある有向グラフであり、辺の本数は $(1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$ 本ある。つまり、サイズは 45 である。位数 (頂点数) は 9 である。このグラフでは、$x < y$ のとき y から x へ行く道はないので、「強連結な部分グラフ」は、各頂点 1 個だけからなるグラフだけである。つまり、「頂点 1 だけからなるグラフ」、「頂点 2 だけからなるグラフ」､､､「頂点 9 だけからなるグラフ」が、それぞれ強連結成分であり、9 個となる。

R_2 に対応するグラフは、$1 \leq x \leq 5$ かつ $6 \leq y \leq 9$ となる x から y へ、また、y から x への辺がある有向グラフである。つまり、辺の本数は $5 * 4 * 2 = 40$ である。位数 (頂点数) は 9 である。このグラフは、完全 2 部グラフであり、頂点 $1, 2, 3, 4, 5$ と頂点 $6, 7, 8, 9$ は全てつながっている。したがって、どの頂点から他のどの頂点に行く道もあるので、全体が強連結である。よって、強連結成分は 1 個である。

R_3 に対応するグラフは、$1, 4, 7$ は全ての頂点間に辺があり、$2, 5, 8$ も同様、$3, 6, 9$ も同様である。よって、辺の本数は $3 * 3 * 3 = 27$ である。位数 (頂点数) は 9 である。このグラフの強連結成分は、3 つである。

例題 2 (木)

- 木の頂点の個数を n とすると，辺の本数は何本あるか答えよ．

  (答) これは授業で説明したように、木の形状によらず、辺は $n - 1$ 本ある。証明は省略。

- 高さ h の完全 2 分木の頂点の個数は，何個以上何個以下であるか答えよ．ただし、高さ h の完全 2 分木とは、深さ 0 以上 $h - 1$ 以下の全ての頂点が 2 個の子を持つ木である。

  (答) 完全 2 分木は、全ての葉の「深さ」(根からの距離) が同じ 2 分木であり、木の高さ (葉の深さの最大値) が h ということは、全ての葉の深さは h である。よって、頂点の個数は、$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^h = 2^{h+1} - 1$ である。

- 高さ h の 3 分木 (完全 3 分木とは限らない) の頂点の個数は，何個以上何個以下であるか答えよ．

  (答) 3 分木の中で、一番頂点が少ないのは、葉が 1 つだけ (根から葉まで一直線になっている) 木であり、これは実際には「1 分木」と言うべきものだが、一応、3 分木の中にもはいる。この木の頂点の個数は、明らかに $h + 1$ である。

3 分木の中で、一番頂点が多いのは、完全 3 分木であり、これは、前問と同様に考えると、頂点数は、$1+3+3^2+\cdots+3^h=\dfrac{3^{h+1}-1}{2}$ となる。

- 頂点が n 個ある木で、互いに異なるものはいくつあるか？$n=3,4$ に対して答えなさい。

  (答) この種の問題は、意外に難しい。ここでは、素朴に $n=1,2,3,4$ の順番に木を作っていくことにする。(位数 n の木は、かならず、位数 $n-1$ の木に頂点と辺を 1 つずつ追加した形をしているので、下から順番に作っていくことができる。)

  [2012/02/03 指摘があったので変更] なお、2 つの木が「異なる」とは、「グラフとして同型でない」という定義としているので、2012/02/03 以前に、このページに載せていた答え (「木として同じ」という考えにもとづいてカウントしていた) とは違うものとなっている。

  $n=1$ のとき: 根だけからなる木になるので、1 個だけである。

  $n=2$ のとき: これも根と葉が 1 個だけからなる木であり、1 個だけである。

  $n=3$ のとき: 根から一直線に葉まで延びていく木と、根が 2 つの子を持つケースがあるが、グラフとしては同型なので、1 個である。

  $n=4$ のとき: $n=3$ の木に、1 個の頂点と 1 本の辺を追加することを考える。すると、直線状の木のほかに、(それとは同型にならない木として) 根が 3 つの子をもつ星状の木があることがわかる。これら以外の木はすべてこれらに同型であるので、合計 2 個である。