『離散構造』 演習問題 No.4 (亀山)

この問題では、$\mathcal{N}_n = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \le x < n\}$ とする。(つまり、$\mathcal{N}_n = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ である。$n \notin \mathcal{N}_n$ であることに注意せよ。)

問 1 (像、全射、単射、合成、逆関数)

$a \in \mathcal{N}_{13}$ に対して、関数 $f_a : \mathcal{N}_{13} \to \mathcal{N}_{13}$ を，$f_a(x) = (a \cdot x) \mod 13$ と定める．ただし， mod は，自然数上の割算の余りを求める演算とする。たとえば、$7 \mod 3 = 1$ である。

(a) $S = \{1, 3, 5\}$ とし、f_7 による S の像 $f_7(S)$ と、f_8 による $f_7(S)$ の像 $f_8(f_7(S))$ を計算しなさい。

(b) 関数 f_5 が単射になることを示しなさい。

(c) 「すべての $a \in \mathcal{N}_{13}$ に対して、関数 f_a は全射である」という命題は成立するか判定しなさい。

(d) 合成関数に関して、任意の $a, b \in \mathcal{N}_{13}$ に対して、$f_a \circ f_b = f_b \circ f_a$ が成立するか判定しなさい。(成立すれば根拠を述べ、成立しないなら反例を示しなさい。)

(e) (発展課題) 一般に関数 $f : S \to S$ を n 回合成した関数 f^n は、$f^0 = id_S$ (恒等関数), $f^{n+1} = f \circ f^n$ $(n \ge 0)$ と定義される。

$x \in \mathcal{N}_{13}$ に対して、$f_2^n(x) = 1$ となる $n \in \mathcal{N}_{13}$ が存在するとき、その最小の n を $g(x) = n$ とする。そのような $n \in \mathcal{N}_{13}$ が存在しないとき、$g(x) = 0$ とする。このような $g : \mathcal{N}_{13} \to \mathcal{N}_{13}$ が関数であるかどうか、また、単射であるかどうか調べなさい。

(f) 本問題の f_a は $a = 1$ のとき恒等関数となり、全単射であり、よって、逆関数を持つ。他の $a \in \mathcal{N}_{13}$ の値について、f_a が全単射になるものを 1 つ以上あげて、その場合の逆関数を示しなさい。

問 2 (関数や集合の性質)

(a) 2 の倍数 (負の数を含む) の集合と、3 で割ると 1 余る整数 (負の数を含む) の集合の間に、全単射が存在することを示しなさい。

(b) 集合 S, T に対して、$f : S \to T$ となる単射 f があれば、$g : T \to S$ となる全射 g が存在することを示しなさい。

(c) 集合 S, T の要素数をそれぞれ n, m とする。$f : S \to T$ となる関数の個数、および、$g : S \to T$ となる単射の個数を m と n の式で表しなさい。

(d) (発展課題) S を集合とするとき、$f : 2^S \to S$ となる関数 f が単射にならないことを示しなさい。(ヒント: $T = \{y \in S \mid y = f(x) \land f(x) \notin x\}$ と置き、$f(T) \in T$ かどうかを考えなさい。)