『離散構造』 3 章 関係の例題 の解答例

例題 1 (関係の性質)
ある瞬間に日本にいる人間からなる集合を H とする。H 上の二項関係として次のものを考えたとき、それぞれが、反射律、対称律、推移律、反対称律を満たすかどうか、理由をつけて答えよ．また、順序，同値関係であるかどうか答えよ。

- $(aR_1b) \Leftrightarrow (a$ が b の親である$)$
- $(aR_2b) \Leftrightarrow (a$ が b の祖先であるか同一人物である$)$
- $(aR_3b) \Leftrightarrow (a$ が b と夫婦である$)$
- $(aR_4b) \Leftrightarrow (a$ が b と同じ都道府県に住んでいる$)$
- $(aR_5b) \Leftrightarrow (a$ と b は別人である$)$

(解答例)

関係	反射律	対称律	推移律	反対称律	順序	同値関係
R_1	no	no	no	yes	no	no
R_2	yes	no	yes	yes	yes	no
R_3	no	yes	no	no	no	no
R_4	yes	yes	yes	no	no	yes
R_5	no	yes	no	no	no	no

(補足) R_1 が反対称律を満たすのは意外かもしれない。xR_1y と yR_1x が両方とも成立することはないので (どちらかは必ず偽なので)、「$((xR_1y) \wedge (yR_1x)) \Rightarrow X$」という形の論理式は X が何であろうと真である。

例題 2 (関係の合成)
$A = \{$ 野球部、テニス部、サッカー部 $\}$, $B = \{$ 伊藤、田中、佐藤、太田、福田、森 $\}$, $C = \{$ 茨城、群馬、宮城、東京 $\}$ とする。
A, B 上の二項関係 R を「$aRb \Leftrightarrow b$ は a のメンバである」と定め，B, C 上の二項関係 S を「$bSc \Leftrightarrow b$ は c 出身である」と定める。ただし、各クラブのメンバーと，各学生の出身地は下記の表で与えられる。

野球部	伊藤、田中、佐藤
テニス部	佐藤、太田
サッカー部	佐藤、森、田中

伊藤	茨城
田中	群馬
佐藤	群馬
太田	宮城
福田	茨城
森	東京

- 以下のように定められる A, B, C 上の三項関係 T を求めよ。

$$\langle x, y, z \rangle \in T \Leftrightarrow ((xRy) \wedge (ySz))$$

- R と S の合成関係 $R \circ S$ を求めよ。これはどういう集合上の二項関係か？

(解答例) $T = \{\langle$ 野球部, 伊藤、茨城 $\langle$ 野球部, 田中、群馬 $\rangle, \langle$ 野球部, 佐藤、群馬 $\rangle, \langle$ テニス部, 伊藤、茨城 $\rangle, \langle$ テニス部, 太田、宮城 $\rangle, \langle$ サッカー部, 佐藤、群馬 $\rangle, \langle$ サッカー部, 森、東京 $\rangle, \langle$ サッカー部, 田中、群馬 $\rangle\rangle$
$R \circ S = \{\langle$ 野球部, 茨城 $\langle$ 野球部, 群馬 $\rangle, \langle$ テニス部, 茨城 $\rangle, \langle$ テニス部, 宮城 $\rangle, \langle$ サッカー部, 東京 $\rangle, \langle$ サッカー部 , 群馬 $\rangle\rangle$
(補足) 上記の 3 項関係 T から、$R \circ S$ を作るのは、容易である。