

『離散構造』 演習問題 No.3 (亀山)

問 1 (有限集合の要素数)

有限集合 S の要素数を $\#S$ と表すことにする. $\#(S \cup T) = \#S + \#T - \#(S \cap T)$ と $\#(S - T) = \#S - \#(S \cap T)$ は既知として以下の問に答えなさい.

1-a 「1 から 10000 までの整数で, 6 の倍数かつ 8 の倍数かつ 9 の倍数であるもの」の個数.

1-b 「1 から 10000 までの整数で, 8 の倍数であって, 1001 と互いに素 (最大公約数が 1) であるもの」の個数.

問 2 (集合に関する証明)

2-a 任意の集合 S と T に対して, $S - T = S - (S \cap T)$ であることを証明せよ.

2-b (発展課題; できる人のみ) 任意の集合 S と T に対して, $S \subset T$ ならば, $2^S \subset 2^T$ であることを証明せよ.

問 3 (関数)

自然数の集合 (非負の整数の集合) を \mathcal{N} とし, 正の有理数の集合を \mathcal{Q}^+ とする.

3-a \mathcal{N} から, \mathcal{Q}^+ への単射を 1 つ示しなさい.

3-b \mathcal{Q}^+ から, \mathcal{N} への全射を 1 つ示しなさい.

3-c \mathcal{Q} から, $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ への単射を 1 つ示しなさい. (ヒント: すべての有理数は, 整数 m, n を使って, n/m という分数の形で表現できる.)

3-d (発展課題; できる人のみ) \mathcal{Q} から, \mathcal{N} への単射は存在するか, 答えなさい. (ヒント: 前問の結果を考えると, $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ から \mathcal{N} への単射が作れればよい.)