『離散構造』 演習問題 No.3 の解答例 (亀山)

問 1 (有限集合の要素数)

有限集合 S の要素数を $\#S$ と表すことにする．$\#(S \cup T) = \#S + \#T - \#(S \cap T)$ と $\#(S - T) = \#S - \#(S \cap T)$ は既知として以下の問に答えなさい．

1-a 「1 から 10000 までの整数で，6 の倍数かつ 8 の倍数かつ 9 の倍数であるもの」の個数．

答え: 6 と 8 と 9 の公倍数は 72 の倍数であるので、$10000/72 = 138$ 個ある。

1-b 「1 から 10000 までの整数で，8 の倍数であって，1001 と互いに素 (最大公約数が 1) であるもの」の個数．

答え: 「1001 と互いに素」とは、7, 11, 13 のどれでも割り切れない数のことである。

8 の倍数は $10000/8 = 1250$ 個ある。8 と 7 の公倍数は $10000/56 = 178$ 個ある。8 と 11 の公倍数は $10000/88 = 113$ 個ある。8 と 13 の公倍数は $10000/104 = 96$ 個ある。8 と 7 と 11 の公倍数は $10000/616 = 16$ 個ある。8 と 7 と 13 の公倍数は $10000/728 = 13$ 個ある。8 と 11 と 13 の公倍数は $10000/1144 = 8$ 個ある。8 と 7 と 11 と 13 の公倍数は $10000/8008 = 1$ 個ある。

よって、1250 - 178 - 113 - 96 + 16 + 13 + 8 - 1 = 899 個である。

問 2 (集合に関する証明)

2-a 任意の集合 S と T に対して，$S - T = S - (S \cap T)$ であることを証明せよ．

答え：

1. 左辺が右辺の部分集合であることの証明

$x \in S - T$ と仮定する。$x \in S$ かつ $x \notin T$ である。よって $x \not\in S \cap T$ である。よって、$x \in (S - (S \cap T))$ である。

2. 右辺が左辺の部分集合であることの証明

$x \in S - (S \cap T)$ と仮定する。$x \in S$ かつ $x \notin S \cap T$ である。よって $\neg((x \in S) \wedge (x \in T))$ である。つまり $(x \notin S) \vee (x \notin T)$ である。しかし、$x \in S$ なので、 $x \notin S$ はあり得ない。よって、$x \notin T$ である。これらより、$x \in S - T$ である。

上記の 1,2 より、左辺と右辺が同じ集合であることが言えた。

2-b (発展課題; できる人のみ) 任意の集合 S と T に対して，$S \subset T$ ならば、$2^S \subset 2^T$ であることを証明せよ。

答え。$S \subset T$ と仮定する。$x \in 2^S$ と仮定する。べき集合の定義から、$x \subset S$ である。よって、$x \subset T$ である。(ここで $S \subset T$ かつ $T \subset V$ ならば $S \subset V$」という事実を使っている。これも定義にもどって証明することができるが、ここでは省略する。) よって、$x \in 2^T$ である。

問 3 (関数)

自然数の集合 (非負の整数の集合) を $\mathcal{N}$ とし，正の有理数の集合を $\mathcal{Q}^+$ とする．

3-a $\mathcal{N}$ から，$\mathcal{Q}^+$ への単射を 1 つ示しなさい．

答え。 いろいろな単射がある。一例は、$f(x) = x + 1$ である。

3-b $\mathcal{Q}^+$ から，$\mathcal{N}$ への全射を 1 つ示しなさい．

答え。$h(q) = floor(q)$ (floor は「小数点以下を切り捨てて整数にする関数」というつもりである。)

3-c $\mathcal{Q}$ から，$\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ への単射を 1 つ示しなさい．(ヒント: すべての有理数は，整数 m,n を使って，n/m という分数の形で表現できる．)

答え。関数 $g:\mathcal{Q}\rightarrow\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ を以下のように定義する。

$$g(r)=\begin{cases}(0,1) & \text{if } r=0\\ (2n,m) & \text{if } r>0,\ r=n/m(\text{既約分数}), m,n>0\\ (-1-2n,m) & \text{if } r<0,\ r=n/m(\text{既約分数}), m>0, n<0\end{cases}$$

この g は $\mathcal{Q}$ から $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ への関数になっている (既約分数を取らないと関数にならない。たとえば、$g(0.5)=g(1/2)=g(2/4)$ なので、既約分数の場合に限定する必要がある。)

また、この g は単射になっている。これを示すために、$g(r)=g(s)$ と仮定する。(目標は $r=s$ を示すことである。)

g の定義の 3 つのケースは、オーバラップしない (1 番目と 2 番目と 3 番目で、一致するケースはない) ので、$g(r)=g(s)$ となるということは、$r=s=0$ か $r,s>0$ か $r,s<0$ のいずれかである。

最初のケースは、$r=s$ である。$r,s>0$ のとき、$g(r)=(2n,m)=g(s)$ なので、$r=n/m=s$ となる。$r,s<0$ のとき、$g(r)=(-1-2n,m)=g(s)$ なので、$r=n/m=s$ となる。よって、いずれのケースでも $r=s$ が言えたので、g は単射である。

3-d (発展課題; できる人のみ) $\mathcal{Q}$ から，$\mathcal{N}$ への単射は存在するか、答えなさい。(ヒント: 前問の結果を考えると、$\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ から $\mathcal{N}$ への単射が作れればよい。)

答え：$\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ から $\mathcal{N}$ への単射は、$f(x,y)=(x+y+1)(x+y)/2+x$ で与えられる。

解説: この関数 f は $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ から $\mathcal{N}$ への全射にもなっているので、全単射である。

f は一見何をやっているかわかりにくい関数だが、(1) 自然数 x,y に対して、(x,y) という形の組すべてに対して、一意的に自然数を割り当てる関数であり、(2) まず、$x+y=0$ となる (x,y) に自然数を割り当て、次に $x+y=1$ となる (x,y) たちに自然数を割り当て、、、、さらに $x+y=2$ となる (x,y) たちに自然数を割り当て、、、、というプロセスを繰返していくものである。

具体的に $0\leq x,y\leq 5$ に対して、$f(x,y)$ の値を計算してみると、どういう関数かわかるので、是非やってみてほしい。