『離散構造』 演習問題 No.2 の解答例 (亀山)

以下の演習問題に対して、演習実施日までに解答 (A4 サイズ用紙、氏名・学籍番号明記) を用意せよ。

問題 1 (論理の続き; 演習問題 1 の最後の問題と同じ)

(a) 命題 $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$ をそれと同値な論理積標準形の命題に変形しなさい。

ただし，論理積標準形の論理式とは，(インフォーマルに述べれば) $\wedge$ の外に $\neg$ も $\vee$ もなく，$\vee$ の外に $\neg$ がない論理式である．(逆にいえば，一番外に $\wedge$ が，次に $\vee$ が，一番内側に $\neg$ がある論理式である．)

手順の復習 1. $\Rightarrow$ や $\Leftrightarrow$ を除去する．2. $\neg$ を一番内側に移動する．3. $\vee$ を $\wedge$ の内側に移動する．

答え: 順番に同値変形していく。同値変形の過程を $A \rightsquigarrow B$ と記す。

$$
\begin{aligned}
((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P &\rightsquigarrow (\neg((\neg((\neg P) \vee Q)) \vee P)) \vee P \\
&\rightsquigarrow ((\neg(\neg((\neg P) \vee Q))) \wedge (\neg P)) \vee P \\
&\rightsquigarrow ((((\neg P) \vee Q))) \wedge (\neg P)) \vee P \\
&\rightsquigarrow (((\neg P) \vee Q) \vee P) \wedge ((\neg P) \vee P)
\end{aligned}
$$

注: 最後の論理式は、同値変形でさらに簡単になり、$(\neg P) \vee P$ となるが、そこまでしなくても、今回の問題は論理積標準形にすればよいので、上記で十分である。

(b) 命題 $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$ をそれと同値な論理積標準形の命題に変形しなさい。

答え:

$$
(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P) \rightsquigarrow ((\neg P) \vee Q) \vee ((\neg Q) \vee P)
$$

問題 2 (集合の記述)

以下の集合を $\{x \in S \mid A\}$ の形 (S は集合，A は x に関する論理式) で記述せよ．

(a) 整数の平方となる整数すべてからなる集合．(「整数 m の平方」とは「m^2」のことである．)

答え: $\{x \in \mathcal{Z} \mid \exists y.\ (y \in \mathcal{Z} \wedge x = y^2)\}$

なお、集合のこの記法 (set comprehension) では、右辺の存在記号は省略してよいことになっているので、以下のように書いてもよい。

答え 2: $\{x \in \mathcal{Z} \mid y \in \mathcal{Z} \wedge x = y^2\}$

(b) 2 つの整数の平方の和となる整数すべてからなる集合 S_1．(「2 つの整数の和の平方」ではない．また，「2 つの相異なる整数の...」でもない．)

答え: $\{x \in \mathcal{Z} \mid \exists y. \exists z.\ (y \in \mathcal{Z} \wedge z \in \mathcal{Z} \wedge x = y^2 + z^2)\}$

前問と同様、存在記号は省略してもよい。

(c) 整数の集合 (有限集合または無限集合) で，7 を要素として持つ集合すべてからなる集合．(ヒント：整数の集合たちからなる集合になる．)

答え: $\{x \in 2^{\mathcal{Z}} \mid 7 \in x\}$.

問題 3 (集合の演算)

以下の集合をの組は必ず同じ集合になるか，必ずしも一致しないか，判定せよ．

(a) 集合 $(S \cup T) \cap V$ と集合 $S \cup (T \cap V)$.

答え: 必ずしも一致しない。なぜなら、以下の反例があるから。

$S = \{1\}$, $T = V = \{\}$ (このとき、問題文の左の集合は $\{\}$ だが、右の集合は $\{1\}$ である。)

(b) 集合 $(S \cup T) - V$ と集合 $S \cup (T - V)$.

答え: 必ずしも一致しない。なぜなら、以下の反例があるから。

$S = \{1\}$, $T = V = \{\}$