# 『離散構造』 2章 集合の例題の解答

**例題 1** (集合の表現)

以下の集合を $\{x \in A \mid P(x)\}$ の形で記述せよ.

(a) うるう年 (4 で割り切れ、100 で割り切れないか、または、400 で割り切れる年) の集合

「a が b を割り切る (b が a で割り切れる)」を $a|b$ と表し、自然数の集合を $\mathcal{N}$ と書けば、問題の集合は、以下の通り。

$$\{x \in \mathcal{N} \mid (4|x) \wedge ((\neg(100|x)) \vee (400|x))\}$$

(b) 素数の集合

$x$ が素数であるとは、$x$ の (正の) 約数が 1 と $x$ しかないものを言う。そこで、「○○を満たすものは△しかない」ことを表現する必要がでてくるが、これは、「y が○○を満たすならば、y=△である」と書けばよい。

よって、素数の集合は以下のように表現できる。

$$\{x \in \mathcal{N} \mid \forall y \in \mathcal{N}.((y|x) \Rightarrow (y = 1 \vee y = x))\}$$

ちなみに、$\{x \in \mathcal{N} \mid ((y|x) \Rightarrow (y = 1 \vee y = x))\}$ と書いてしまうと、$\{x \in \mathcal{N} \mid \exists y.\ ((y|x) \Rightarrow (y = 1 \vee y = x))\}$ の意味になるので、まったく違う集合となってしまう。

(c) 3 桁の自然数で，それぞれの桁の数字が異なるものを集めた集合 (例: 123 はこの集合に属し，122 は属さない．)

これはいろいろな表現方法がある。一番短く表現するより、正確に表現することを目指すと、以下のようになる。

$$\{x \in \mathcal{N} \mid x = 100a + 10b + c \wedge (1 \leq a \leq 9) \wedge (0 \leq b \leq 9) \wedge (0 \leq c \leq 9) \wedge (a \neq b) \wedge (b \neq c) \wedge (c \neq a)\}$$

これは、$x$ の 3 つの桁を、高い方から順番に a, b, c と書いたものである。

なお、上記の縦棒の右の命題は「。。となる a,b,c が存在する」という意味であり、従って、以下の表現でもよい。

$$\{x \in \mathcal{N} \mid \exists a \in \mathcal{N}.\exists b \in \mathcal{N}.\exists c \in \mathcal{N}.x = 100a + 10b + c \wedge \cdots\}$$

(d) 自然数の集合で 3 を含むもの (たとえば、奇数の集合や素数の集合) をすべて集めた集合

定義したい集合は、集合の集合であり、その要素となる集合 (の 1 つ) を $S$ と書くと、$3 \in S$ を満たさなければいけない。よって、以下のように定義できる。

$$\{S \in 2^{\mathcal{N}} \mid 3 \in S\}$$

もちろん、以下のように書いても同じことであるが、本問では、「$\{x \in A \mid P(x)\}$ の形で記述せよ」という指定があるので、以下の形で答えてはいけない。

$$\{S \subset \mathcal{N} \mid 3 \in S\}$$

**例題 2** (集合の演算)

$A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, $C=\{1,3,4\}$ とするとき，以下の等式の左右両辺を計算して、等式が成立するかどうか答えよ。

(a) $A\cup(B\cap C)=A\cap(B\cup C)$: 左辺=$\{1,2,3,4\}$, 右辺=$\{1,2,3\}$ となって等式は成立しない.

(b) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$: 左辺=$\{1,3,4\}$, 右辺=$\{1,3,4\}$ となって等式は成立する. (実際この等式は、どんな $A,B,C$ に対しても成立することが証明できる。)

(c) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$: 左辺=$\{2\}$, 右辺=$\{2\}$ となって等式は成立する. (実際この等式は、どんな $A,B,C$ に対しても成立することが証明できる。)

(d) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$: 左辺=$\{2\}$, 右辺=$\{2\}$ となって等式は成立する. (実際この等式は、どんな $A,B,C$ に対しても成立することが証明できる。)

(e) $2^{\{\}}=\{\}$: 左辺=$\{\{\}\}$, 右辺=$\{\}$ となって等式は成立しない.

これは間違いやすいところだが、$2^{\{\}}$ は要素数が $2^0=1$ の集合であり、空集合ではない。

**例題 3** (集合に関する推論)

集合 $A,B,C$ に対して以下の等式が成立するか考え，証明または反証せよ.

(a) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

成立するので証明する。

(左辺⊂右辺 の証明 ) $x\in(A\cap B)\cup C$ と仮定する。$\cup$ の定義より、$x\in A\cap B$ または $x\in C$ である。この 2 つの Case に場合分けして証明する。

(Case-1: $x\in A\cap B$ のとき) $\cap$ の定義より、$x\in A$ かつ $x\in B$ である。これらと $\cup$ の定義より、$x\in A\cup C$ かつ $x\in B\cup C$ である。さらに $\cap$ の定義より、$x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$ である。

(Case-2: $x\in C$ のとき) $\cup$ の定義より、$x\in A\cup C$ かつ $x\in B\cup C$ がいえるので、上記と同様に、$x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$ である。

これで、(左辺⊂右辺 ) が言えた。

(右辺⊂左辺 の証明 ) $x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$ と仮定する。

$\cap$ の定義より、$x\in A\cup C$ かつ $x\in B\cup C$ である。$\cup$ の定義より、$x\in A$ または $x\in C$ がいえる。それらと独立に、$x\in B$ または $x\in C$ がいえる。これらをまとめると、4 つの Case がある。

(Case-1: $x\in A$ かつ $x\in B$ のとき) $x\in A\cap B$ であるので、$x\in(A\cap B)\cup C$ が言える。

(Case-2: $x\in A$ かつ $x\in C$ のとき) $x\in C$ なので、$x\in(A\cap B)\cup C$ が言える。

(Case-3: $x\in C$ かつ $x\in B$ のとき) $x\in C$ なので、$x\in(A\cap B)\cup C$ が言える。

(Case-4: $x\in C$ かつ $x\in C$ のとき) $x\in C$ なので、$x\in(A\cap B)\cup C$ が言える。

上記の 4 つの Case いずれでも、(右辺⊂左辺 ) が言えた。

上記より、左右両辺が、集合として等しいことが証明できた。(証明おわり)

補足: 後半の証明で 4 つの Case に分けたが、これは、解説のために丁寧に書いたためであり、実際には、「$x\in A$ かつ $x\in B$」という Case と、「$x\in C$」という Case の 2 つに分ければ十分である。

(b) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

$\Leftrightarrow$ の形の命題なので、$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$ と $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$ の両方を言う必要がある。

($A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$ の証明) $A \subset B$ と仮定する。$A \cup B = B$ を言いたいのだが、$B \subset A \cup B$ は簡単に言えるので、$A \cup B \subset B$ だけを示すことにする。

このため、$x \in A \cup B$ と仮定する。$x \in A$ または $x \in B$ である。$x \in A$ のとき $A \subset B$ と仮定しているので、$x \in B$ である。よって、いずれにしても $x \in B$ である。以上より、$A \cup B \subset B$ が言えた。

($A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$ の証明)

$A \cup B = B$ と仮定する。$A \subset B$ を言いたいので、$x \in A$ と仮定する。

$x \in A$ と $A \subset B$ から $x \in B$ が言える。$x \in A$ を仮定して、$x \in B$ が言えたので、$A \subset B$ である。(証明終わり)

(c) $A = B \Rightarrow A - C = B - C$.

$A = B$ と仮定する。$A - C = B - C$ を証明するためには、$A - C \subset B - C$ と $B - C \subset A - C$ を言えばよい。

($A - C \subset B - C$ の証明) $x \in A - C$ と仮定する。(目標は $x \in B - C$ を示すことである。) 差集合の定義より、$x \in A$ かつ $x \notin C$ である。$A = B$ なので $x \in B$ である。よって、$x \in B - C$ である。

($B - C \subset A - C$ の証明) 上記と同様。

以上から、$A = B$ を仮定して $A - C = B - C$ が言えたので、$A = B \Rightarrow A - C = B - C$ が言えた。(証明終わり)

**例題 4** (集合の要素の数)

集合 $A$ に対して，その要素数を $\#A$ と表示する．(なお，集合の要素数のことを、濃度 (cardinality) と呼ぶ．) 以下の論理式がすべての有限集合 $A, B$ に対して成立するかどうか考えなさい。

(a) $\#(A \cup B) = \#A\ +\ \#B$.

成立しない。反例: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ とすると、左辺は 3 で、右辺は 4 となる。

補足: 授業でも何度か言ったことだが、「すべての。。。に対して成立する」ことの反証は、「。。。」を満たさない具体例を 1 つ示せばよい。これを反例 (counterexample) と言う。一方、「。。。とは限らない」や「。。。は証明できない」ということを言うだけでは、「。。。でない」ことの証明とは言えない。

(b) $\#(A - B) = \#A\ -\ \#(A \cap B)$.

成立する。

このことを以下のようにして示す。

まず、非常に簡単にわかることとして、$X = Y \cup Z$ で、かつ、$Y \cap Z = \{\}$ のとき、$\#X = \#Y + \#Z$ である。

この式で、$X = A$, $Y = A - B$, $Z = A \cap B$ と置くと、$\#A = \#(A - B) + \#(A \cap B)$ となり、問題文の等式が導かれる。

が、これが導かれるためには、$A = (A - B) \cup (A \cap B)$ と、$(A - B) \cap (A \cap B) = \{\}$ の 2 つが言えなければいけない。(そこを飛ばしてしまうと、証明にならない。)

1. $A = (A - B) \cup (A \cap B)$: これは、前問と同様にして証明できる。(証明は長くなるので、ここでは省略)

2. $(A-B)\cap(A\cap B)=\{\}$: これを証明するには、$x\in(A-B)\cap(A\cap B)$ と仮定して矛盾する (そのような $x$ は存在しない) ことを言えばよい。

$x\in A-B$ かつ $x\in A\cap B$ である。前者から、$x\in A$ かつ $x\notin B$ である。後者から、$x\in A$ かつ $x\in B$ である。これらは矛盾するので、このような $x$ はない。つまり、$(A-B)\cap(A\cap B)=\{\}$ である。

以上で証明おわり。

(c) $\#(A\times B)=\#A\times\#B.$

成立する。

左辺の要素は、$\langle a,b\rangle$ の形であり、$a\in A$ かつ $b\in B$ である。$a$,$b$ の選択は独立であるので、$\#A$ と $\#B$ の積の個数だけの要素がある。