

『離散構造』 演習問題 No.1 の解答例 (亀山)

以下の問題について、次回の演習実施日までに解答を用意せよ。

問 1 次の日本語の文を命題論理の論理式として表現しなさい。

- (a) 今年と来年、猛勉強すれば、3年生で希望する主専攻に行ける。

原子命題: P = 「今年、猛勉強する」、 Q = 「来年、猛勉強する」、 R = 「3年生で、希望する主専攻に行ける」、 S = 「4年生で、希望する研究室に行ける」、 T = 「人生は順風満帆である」

答: $(P \wedge Q) \Rightarrow R$

- (b) 3年生で希望する主専攻に行ければ、4年生で希望する研究室に行け、4年生で希望する研究室に行ければ、人生は順風満帆である。

原子命題: 前問とおなじ。

答: $(R \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow T)$

- (c) 人生は順風満帆でなければ、今年か来年の少なくとも一方で、猛勉強しなかった。

原子命題: 前問とおなじ。

答: $(\neg T) \Rightarrow ((\neg P) \vee (\neg Q))$

- (d) どんな実数 r と s に対しても $r < s$ と $s \leq r$ のいずれかが成立する。

原子命題: 「 x が実数である」 (これを $Real(x)$ を書くことにする)、「 $x < y$ 」、「 $x \leq y$ 」

答: $\forall r. \forall s. ((Real(r) \wedge Real(s)) \Rightarrow (r < s \vee s \leq r))$

(他にも多数の解がある。たとえば、 $\forall r. \forall s. (Real(r) \Rightarrow (Real(s) \Rightarrow (r < s \vee s \leq r)))$ など。

また、集合の記法を使って、 $\forall r \in \mathcal{R}. \forall s \in \mathcal{R}. (r < s \vee s \leq r)$ としてもよい。

- (e) どんな実数に対しても、それより大きな実数が存在する。

原子命題: 前問とおなじ。

答: $\forall r. (Real(r) \Rightarrow \exists s. (Real(s) \wedge r < s))$.

- (f) どんな実数よりも大きな実数は存在しない。

原子命題: 前問とおなじ。

答: $\neg(\exists s. (Real(s) \wedge \forall r. (Real(r) \Rightarrow r < s)))$.

- (g) x は素数である。

原子命題: 「 $x=yz$ 」あるいは「 x は y の倍数である」などを適宜使ってよい。ただし「 x は素数である」を使ってはいけない。

答: $y|x$ が「 x は y の倍数である」を表すとすると、 $x > 1 \wedge (\forall y. ((1 < y \wedge y < x) \Rightarrow \neg(y|x)))$.

- (h) x を割り切る数がすべて、 y を割り切るならば、 x は y を割り切る。(注。この命題自体は「偽」の命題である。)

答: $(\forall u. (u|x \Rightarrow u|y)) \Rightarrow (x|y)$.

問 2

- (a) 命題 $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$ および $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$ の真理値表を書いて、これらが恒真、充足可能、充足不能、恒偽、そのいずれでもない、のどれであるか答えなさい。(ただし、2つ以上に該当することもある。)

答: 1つ目の論理式について、真理値表は以下の通りで、恒真かつ充足可能である。

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

答: 2つ目の論理式について、真理値表は以下の通りで、恒真かつ充足可能である。

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

- (b) 命題 $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ および $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ の真理値表を書いて、これらが同値かどうか調べなさい。

答: 真理値表は以下の通りで、同値である。

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	F	T	F	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T

- (c) 命題 $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$ および $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$ を、それぞれ、それと同値な論理積標準形の命題に変形しなさい。

答: (次回の演習で解答する)