

『離散構造』演習問題 No.7 (海野)

出題: 2016 年 12 月 2 日

期限: 2016 年 12 月 9 日の授業

問題 1 (集合の帰納的定義)

- (a) 自然数のリストのうち、隣り合う要素の差が 2 以下であるものからなる集合 L を帰納的に定義しなさい。例えば $\langle \rangle, \langle 1, 3, 5, 4 \rangle, \langle 2, 2, 0 \rangle \in L$ だが $\langle 1, 4 \rangle \notin L$ である。
- (b) 文字集合 (アルファベット) $\{(\langle, \rangle)\}$ 上の文字列のうち、開き括弧 (と閉じ括弧) の対応が完全にとれているものからなる集合 S を帰納的に定義せよ。例えば $\Lambda, (\langle \rangle), (\langle \rangle(\langle \rangle)\langle \rangle) \in S$ だが $\langle \rangle, \langle \rangle \notin S$ である。

問題 2 (関数の帰納的定義)

文字集合 (アルファベット) $\Sigma = \{[,], X, \oplus, \otimes\}$ 上の文字列集合 B を以下のように帰納的に定める。

- $X \in B$
- $e_1, e_2 \in B$ ならば $[e_1 \oplus e_2] \in B$
- $e_1, e_2 \in B$ ならば $[e_1 \otimes e_2] \in B$

このように定義された集合 B に対して関数 $f: B \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ と $g: B \times B \rightarrow B$ を次のように帰納的に定める。

$$f(e, n) = \begin{cases} n & (\text{if } e = X) \\ f(e_1, n) + f(e_2, n) & (\text{if } e = [e_1 \oplus e_2]) \\ f(e_1, n) \times f(e_2, n) & (\text{if } e = [e_1 \otimes e_2]) \end{cases}$$
$$g(e, e') = \begin{cases} e' & (\text{if } e = X) \\ [g(e_1, e') \oplus g(e_2, e')] & (\text{if } e = [e_1 \oplus e_2]) \\ [g(e_1, e') \otimes g(e_2, e')] & (\text{if } e = [e_1 \otimes e_2]) \end{cases}$$

関数 f, g に関して、以下の問に答えよ。

- (a) $f([([X \otimes X] \oplus X), 2)$ の値を求めよ。
- (b) $f([X \otimes [X \oplus X]], 1)$ の値を求めよ。
- (c) $g([([X \otimes X] \oplus X), [X \otimes [X \oplus X]])$ の値を求めよ。
- (d) $f(g([([X \otimes X] \oplus X), [X \otimes [X \oplus X]]), 1)$ の値を求めよ。
- (e) 任意の $e \in B$ と $n \in \mathcal{N}$ について $f(e, n) \geq n$ であることを証明しなさい。
- (f) 任意の $e_1, e_2 \in B$ と $n \in \mathcal{N}$ について $f(g(e_1, e_2), n) = f(e_1, f(e_2, n))$ であることを証明しなさい。