『離散構造』演習問題 No.7 解答例（海野）

問題 1 (集合の帰納的定義)

(a) 自然数のリストのうち、隣り合う要素の差が 2 以下であるものからなる集合 L を帰納的に定義しなさい。例えば $\langle\rangle, \langle 1,3,5,4\rangle, \langle 2,2,0\rangle \in L$ だが $\langle 1,4\rangle \notin L$ である。

答. そのような集合 L は以下を満たす最小の集合として帰納的に定義される。

- $\langle\rangle \in L$
- $\forall n(n \in \mathcal{N} \Rightarrow \langle n\rangle \in L)$
- $\forall n, l(n \in \mathcal{N} \wedge l \in L \wedge l \neq \langle\rangle \wedge |n - \mathrm{head}(l)| \leq 2 \Rightarrow \mathrm{cons}(n,l) \in L)$

(b) 文字集合（アルファベット）$\{(,)\}$ 上の文字列のうち、開き括弧 (と閉じ括弧) の対応が完全に取れているものからなる集合 S を帰納的に定義せよ。例えば $\Lambda, (()), (()(())()) \in S$ だが $)(),)(\notin S$ である。

答. S は以下を満たす最小の集合として帰納的に定義される。

- $\Lambda \in S$
- $\forall s(s \in S \Rightarrow (\ s\ ) \in S)$
- $\forall s_1, s_2(s_1 \in S \wedge s_2 \in S \Rightarrow s_1 \cdot s_2 \in S)$

問題 2 (関数の帰納的定義)

文字集合（アルファベット）$\Sigma = \{[,], X, \oplus, \otimes\}$ 上の文字列集合 B を以下のように帰納的に定める。

- $X \in B$
- $e_1, e_2 \in B$ ならば $[e_1 \oplus e_2] \in B$
- $e_1, e_2 \in B$ ならば $[e_1 \otimes e_2] \in B$

このように定義された集合 B に対して関数 $f : B \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ と $g : B \times B \to B$ を次のように帰納的に定める。

$$f(e,n) = \begin{cases} n & (\text{if } e = X) \\ f(e_1,n) + f(e_2,n) & (\text{if } e = [e_1 \oplus e_2]) \\ f(e_1,n) \times f(e_2,n) & (\text{if } e = [e_1 \otimes e_2]) \end{cases}$$

$$g(e,e') = \begin{cases} e' & (\text{if } e = X) \\ [g(e_1,e') \oplus g(e_2,e')] & (\text{if } e = [e_1 \oplus e_2]) \\ [g(e_1,e') \otimes g(e_2,e')] & (\text{if } e = [e_1 \otimes e_2]) \end{cases}$$

関数 f, g に関して、以下の問に答えよ。

(a) $f([[X \otimes X] \oplus X], 2)$ の値を求めよ。

答.

$$\begin{aligned} f([[X \otimes X] \oplus X], 2) &= f([X \otimes X], 2) + f(X, 2) && (\text{f}の定義による) \\ &= f(X,2) \times f(X,2) + f(X,2) && (\text{f}の定義による) \\ &= 2 \times 2 + 2 && (\text{f}の定義による) \\ &= 6 \end{aligned}$$

(b) $f([X \otimes [X \oplus X]], 1)$ の値を求めよ。

答.

$$\begin{array}{rcll} f([X \otimes [X \oplus X]], 1) & = & f(X,1) \times f([X \oplus X], 1) & \text{(fの定義による)} \\ & = & f(X,1) \times (f(X,1) + f(X,1)) & \text{(fの定義による)} \\ & = & 1 \times (1+1) & \text{(fの定義による)} \\ & = & 2 & \end{array}$$

(c) $g([[X \otimes X] \oplus X], [X \otimes [X \oplus X]])$ の値を求めよ。

答. $e = [X \otimes [X \oplus X]]$ とおく。

$$\begin{array}{rcll} g([[X \otimes X] \oplus X], e) & = & [g([X \otimes X], e) \oplus g(X, e)] & \text{(gの定義による)} \\ & = & [[g(X,e) \otimes g(X,e)] \oplus g(X,e)] & \text{(gの定義による)} \\ & = & [[[X \otimes [X \oplus X]] \otimes [X \otimes [X \oplus X]]] \oplus [X \otimes [X \oplus X]]] & \text{(gの定義による)} \end{array}$$

(d) $f(g([[X \otimes X] \oplus X], [X \otimes [X \oplus X]]), 1)$ の値を求めよ。

答.

$$\begin{array}{rll} & f(g([[X \otimes X] \oplus X], [X \otimes [X \oplus X]]), 1) & \\ = & f([[[X \otimes [X \oplus X]] \otimes [X \otimes [X \oplus X]]] \oplus [X \otimes [X \oplus X]]], 1) & \text{((}c\text{) による)} \\ = & (((1 \times (1+1)) \times (1 \times (1+1))) + (1 \times (1+1))) & \text{(fの定義による)} \\ = & 6 & \text{(gの定義による)} \end{array}$$

(e) 任意の $e \in B$ と $n \in \mathcal{N}$ について $f(e,n) \geq n$ であることを証明しなさい。

答. e に関する帰納法で証明する。

- case $e = X$:

$$\begin{array}{rcll} f(X,n) & = & n & \text{(fの定義による)} \\ & \geq & n & \end{array}$$

- case $e = [e_1 \oplus e_2]$: 帰納法の仮定より、$f(e_1,n) \geq n$ かつ $f(e_2,n) \geq n$ である。

$$\begin{array}{rcll} f([e_1 \oplus e_2], n) & = & f(e_1,n) + f(e_2,n) & \text{(fの定義による)} \\ & \geq & 2n & \text{(帰納法の仮定による)} \\ & \geq & n & \end{array}$$

- case $e = [e_1 \otimes e_2]$: 帰納法の仮定より、$f(e_1,n) \geq n$ かつ $f(e_2,n) \geq n$ である。

$$\begin{array}{rcll} f([e_1 \otimes e_2], n) & = & f(e_1,n) \times f(e_2,n) & \text{(fの定義による)} \\ & \geq & n^2 & \text{(帰納法の仮定による)} \\ & \geq & n & \end{array}$$

(f) 任意の $e_1, e_2 \in B$ と $n \in \mathcal{N}$ について $f(g(e_1,e_2),n) = f(e_1, f(e_2,n))$ であることを証明しなさい。

答. e_1 に関する帰納法で証明する。

- case $e_1 = X$:

$$\begin{array}{rcll} \text{(左辺)} = f(g(X,e_2),n) & = & f(e_2,n) & \text{(gの定義による)} \\ & = & f(X, f(e_2,n)) & \text{(fの定義による)} \\ & = & \text{(右辺)} & \end{array}$$

- case $e_1 = [e \oplus e']$: 帰納法の仮定より、$f(g(e, e_2), n) = f(e, f(e_2, n))$ かつ $f(g(e', e_2), n) = f(e', f(e_2, n))$ である。

$$
\begin{array}{rcll}
(\text{左辺}) = f(g([e \oplus e'], e_2), n) & = & f([g(e, e_2) \oplus g(e', e_2)], n) & (\text{gの定義による}) \\
& = & f(g(e, e_2), n) + f(g(e', e_2), n) & (\text{fの定義による}) \\
& = & f(e, f(e_2, n)) + f(e', f(e_2, n)) & (\text{帰納法の仮定による}) \\
& = & f([e \oplus e'], f(e_2, n)) & (\text{fの定義による}) \\
& = & (\text{右辺}) &
\end{array}
$$

- case $e_1 = [e \otimes e']$: 帰納法の仮定より、$f(g(e, e_2), n) = f(e, f(e_2, n))$ かつ $f(g(e', e_2), n) = f(e', f(e_2, n))$ である。

$$
\begin{array}{rcll}
(\text{左辺}) = f(g([e \otimes e'], e_2), n) & = & f([g(e, e_2) \otimes g(e', e_2)], n) & (\text{gの定義による}) \\
& = & f(g(e, e_2), n) \times f(g(e', e_2), n) & (\text{fの定義による}) \\
& = & f(e, f(e_2, n)) \times f(e', f(e_2, n)) & (\text{帰納法の仮定による}) \\
& = & f([e \otimes e'], f(e_2, n)) & (\text{fの定義による}) \\
& = & (\text{右辺}) &
\end{array}
$$