『離散構造』演習問題 No.6 解答例 (海野)

問題 1 (無向グラフ)
　無向グラフ G_1 を以下のように定める。

- 頂点の集合 $V = \{\{x, y\} \mid x, y \in \{a, b, c, d, e\}, x \neq y\}$,
- 頂点 $x \in V$ と $y \in V$ の間に辺があることの必要十分条件は $x \cap y = \emptyset$

解答準備. グラフ G_1 を図示すると図 1 のようになる。

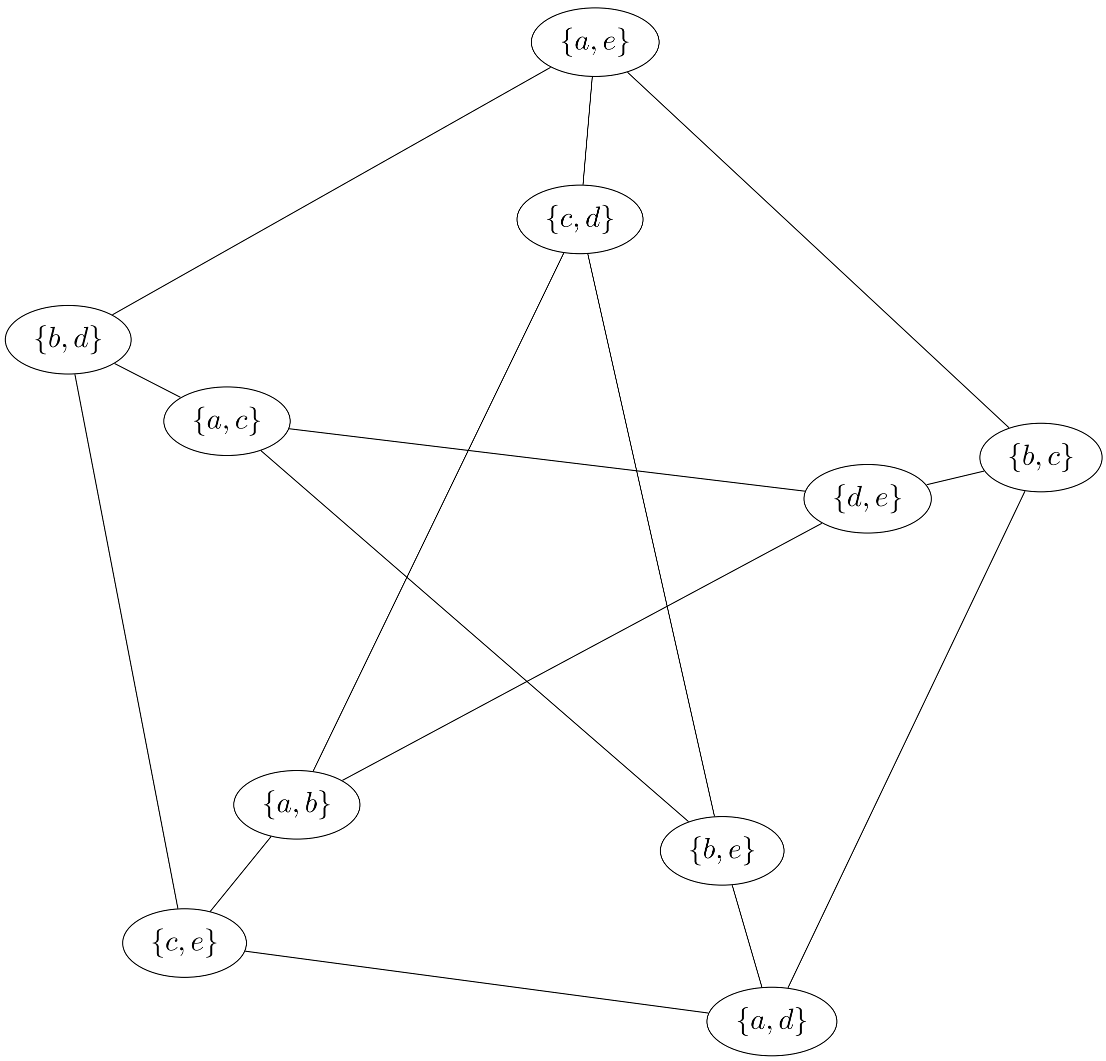

図 1: グラフ G_1

(a) 頂点 $\{a, b\}$ と $\{c, e\}$ の次数をそれぞれ求めよ。

　答. 頂点 $\{a, b\}$ と $\{c, e\}$ の次数は 3 である。

(b) 頂点 $\{a,b\}$ から $\{b,d\}$ への道の中で最短のものを一つ求め、その長さを答えよ。

答. $\langle\{a,b\},\{c,e\},\{b,d\}\rangle$ が最短の道であり、その長さは 2 である。

(c) 頂点 $\{a,b\}$ から $\{b,d\}$ への道の中で最長のものを一つ求め、その長さを答えよ。

答. いくらでも長い道が作れてしまうため最長の道は存在しない。最長の単純道という条件を書き忘れるという出題ミスがあった。以下では最長の単純道という条件をつけて解答する。ここで、できるだけ少ない本数の辺を削除することによって一筆書きが可能な部分グラフを求めれば、その一筆書きが最長の単純道になることに注意する。オイラーの定理より、そのような部分グラフは 10 個のうち 8 個以上の頂点の次数が偶数でなければならない。したがって、G_1 から少なくとも 4 本の辺を削って、2 個の頂点の次数が 3、それ以外の 8 個の頂点の次数が 2 となるようにする必要があるが、実際に G_1 からちょうど 4 本の辺を削った部分グラフでそのようなものが存在する。その一筆書きは $\langle\{a,b\},\{c,d\},\{b,e\},\{a,d\},\{b,c\},\{a,e\},\{b,d\},\{c,e\},\{a,b\},\{d,e\},\{a,c\},\{b,d\}\rangle$ であり、その長さは $15-4=11$ である。

(d) グラフ G_1 のサイズ（辺の本数）と位数（頂点の数）と連結成分の個数を求めよ。

答. サイズは $\frac{3\cdot 10}{2}=15$、位数は 10、連結成分の数は 1 である。

(e) グラフ G_1 のすべての辺を通る単純道（同じ辺を 2 回以上通らない道）を一つ求めよ。存在しないならばそう答えよ。

答. 頂点の次数がすべて 3 で奇数なので存在しない。

(f) グラフ G_1 のすべての頂点を通る単純道を一つ求めよ。存在しないならばそう答えよ。

答. $\langle\{a,b\},\{c,d\},\{b,e\},\{a,c\},\{d,e\},\{b,c\},\{a,d\},\{c,e\},\{b,d\},\{a,e\}\rangle$ はすべての頂点を通る（最短の）単純道である。題意を満たす単純道は他にも存在する。

問題 2 (有向グラフ)

有向グラフ G_2 を以下のように定める。

- 頂点の集合 $V=\{0,1,\cdots,7\}$,
- 辺の集合 $E=\{\langle x,y\rangle\in V\times V \mid y=2\cdot x \bmod 8 \vee y=(2\cdot x+1) \bmod 8\}$.

解答準備. グラフ G_2 を図示すると図 2 のようになる。

(a) 頂点 2 と 7 の出次数と入次数をそれぞれ求めよ。

答. 頂点 2 の入次数は 2, 出次数は 2 である。頂点 7 の入次数は 2, 出次数は 2 である。

(b) 頂点 1 から 5 への単純道の個数を求めよ（正確に数え上げるのは簡単ではない）。

答. 91 個存在する。以下でそれを列挙する方法を説明するが、考え方を理解すればよく、細かいところまですべて理解する必要はない。漏れや重複がないように数え上げるためには、図 3 のように、G_2 の頂点集合の要素を頂点のラベルとして持つような 2 分木 G_3 を、ラベル 1 を持つ頂点 r を G_3 の根とし、G_3 の各頂点 v について、v のラベルに対応する G_2 の頂点から G_2 の辺を（同じ辺は高々1 回しか使わないように注意しながら）使って辿れる G_2 の（高々2 個の）頂点それぞれをラベルとして持つ G_3 の新しい頂点をすべて v の子として追加することによって構成した後に、根 r からラベル 5 を持つ頂点にいたる道をすべて列挙すれば良い。木を手動で構成するのはとてもとても大変だが、根からある頂点にいたる道にラベル 1 が 3 回出てきたらそれより下の木を構成する必要がないことや、ラベルが 0 と 7 の頂点については左右の部分木が同じ形になることを利用して構成すればなんとかなる。以下に

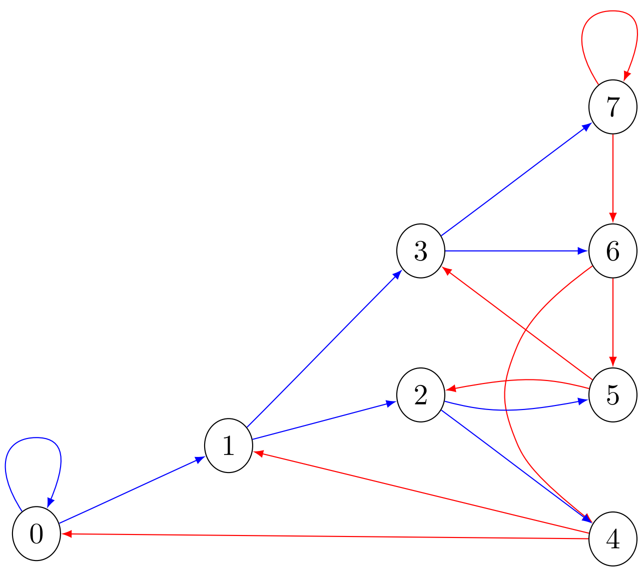

図 2: グラフ G_2

91 個すべての単純道を示す。

$\langle 1,2,5\rangle, \langle 1,3,6,5,2,4,1,2,5\rangle, \langle 1,3,7,6,5,2,4,1,2,5\rangle, \langle 1,3,7,7,6,5,2,4,1,2,5\rangle,$
$\langle 1,3,6,4,1,2,5\rangle, \langle 1,3,7,6,5,3,6,4,1,2,5\rangle, \langle 1,3,7,7,6,5,3,6,4,1,2,5\rangle, \langle 1,3,7,6,4,1,2,5\rangle,$
$\langle 1,3,7,7,6,4,1,2,5\rangle, \langle 1,3,6,5,3,7,6,4,1,2,5\rangle, \langle 1,3,6,5,3,7,7,6,4,1,2,5\rangle, \langle 1,3,6,5,2,4,0,1,2,5\rangle,$
$\langle 1,3,6,5,2,4,0,0,1,2,5\rangle, \langle 1,3,7,6,5,2,4,0,1,2,5\rangle, \langle 1,3,7,7,6,5,2,4,0,1,2,5\rangle, \langle 1,3,7,6,5,2,4,0,0,1,2,5\rangle,$
$\langle 1,3,7,7,6,5,2,4,0,0,1,2,5\rangle, \langle 1,3,6,4,0,1,2,5\rangle, \langle 1,3,6,4,0,0,1,2,5\rangle, \langle 1,3,7,6,5,3,6,4,0,1,2,5\rangle,$
$\langle 1,3,7,7,6,5,3,6,4,0,1,2,5\rangle, \langle 1,3,7,6,5,3,6,4,0,0,1,2,5\rangle, \langle 1,3,7,7,6,5,3,6,4,0,0,1,2,5\rangle,$
$\langle 1,3,7,6,4,0,1,2,5\rangle, \langle 1,3,7,7,6,4,0,1,2,5\rangle, \langle 1,3,7,6,4,0,0,1,2,5\rangle, \langle 1,3,7,7,6,4,0,0,1,2,5\rangle,$
$\langle 1,3,6,5,3,7,6,4,0,1,2,5\rangle, \langle 1,3,6,5,3,7,7,6,4,0,1,2,5\rangle, \langle 1,3,6,5,3,7,6,4,0,0,1,2,5\rangle,$
$\langle 1,3,6,5,3,7,7,6,4,0,0,1,2,5\rangle, \langle 1,3,6,5,2,5\rangle, \langle 1,2,4,0,1,3,6,5,2,5\rangle, \langle 1,2,4,0,0,1,3,6,5,2,5\rangle,$
$\langle 1,2,4,1,3,6,5,2,5\rangle, \langle 1,3,7,6,5,2,5\rangle, \langle 1,3,7,7,6,5,2,5\rangle, \langle 1,2,4,0,1,3,7,6,5,2,5\rangle,$
$\langle 1,2,4,0,0,1,3,7,6,5,2,5\rangle, \langle 1,2,4,0,1,3,7,7,6,5,2,5\rangle, \langle 1,2,4,0,0,1,3,7,7,6,5,2,5\rangle, \langle 1,2,4,1,3,7,6,5,2,5\rangle,$
$\langle 1,2,4,1,3,7,7,6,5,2,5\rangle, \langle 1,3,6,5\rangle, \langle 1,2,4,0,1,3,6,5\rangle, \langle 1,2,4,0,0,1,3,6,5\rangle, \langle 1,2,5,2,4,0,1,3,6,5\rangle,$
$\langle 1,2,5,2,4,0,0,1,3,6,5\rangle, \langle 1,2,5,3,7,6,4,0,1,3,6,5\rangle, \langle 1,2,5,3,7,7,6,4,0,1,3,6,5\rangle,$
$\langle 1,2,5,3,7,6,4,0,0,1,3,6,5\rangle, \langle 1,2,5,3,7,7,6,4,0,0,1,3,6,5\rangle, \langle 1,2,4,1,3,6,5\rangle, \langle 1,2,5,2,4,1,3,6,5\rangle,$
$\langle 1,2,5,3,7,6,4,1,3,6,5\rangle, \langle 1,2,5,3,7,7,6,4,1,3,6,5\rangle, \langle 1,2,5,3,6,5\rangle, \langle 1,3,7,6,4,0,1,2,5,3,6,5\rangle,$
$\langle 1,3,7,7,6,4,0,1,2,5,3,6,5\rangle, \langle 1,3,7,6,4,0,0,1,2,5,3,6,5\rangle, \langle 1,3,7,7,6,4,0,0,1,2,5,3,6,5\rangle,$
$\langle 1,3,7,6,4,1,2,5,3,6,5\rangle, \langle 1,3,7,7,6,4,1,2,5,3,6,5\rangle, \langle 1,7,6,5\rangle, \langle 1,7,7,6,5\rangle, \langle 1,2,4,0,1,3,7,6,5\rangle,$
$\langle 1,2,4,0,0,1,3,7,6,5\rangle, \langle 1,2,4,0,1,3,7,7,6,5\rangle, \langle 1,2,4,0,0,1,3,7,7,6,5\rangle, \langle 1,2,5,2,4,0,1,3,7,6,5\rangle,$
$\langle 1,2,5,2,4,0,0,1,3,7,6,5\rangle, \langle 1,2,5,2,4,0,1,3,7,7,6,5\rangle, \langle 1,2,5,2,4,0,0,1,3,7,7,6,5\rangle,$
$\langle 1,2,5,3,6,4,0,1,3,7,6,5\rangle, \langle 1,2,5,3,6,4,0,0,1,3,7,6,5\rangle, \langle 1,2,5,3,6,4,0,1,3,7,7,6,5\rangle,$
$\langle 1,2,5,3,6,4,0,0,1,3,7,7,6,5\rangle, \langle 1,2,4,1,3,7,6,5\rangle, \langle 1,2,4,1,3,7,7,6,5\rangle, \langle 1,2,5,2,4,1,3,7,6,5\rangle,$
$\langle 1,2,5,2,4,1,3,7,7,6,5\rangle, \langle 1,2,5,3,6,4,1,3,7,6,5\rangle, \langle 1,2,5,3,6,4,1,3,7,7,6,5\rangle, \langle 1,2,5,3,7,6,5\rangle,$
$\langle 1,2,5,3,7,7,6,5\rangle, \langle 1,3,6,4,0,1,2,5,3,7,6,5\rangle, \langle 1,3,6,4,0,0,1,2,5,3,7,6,5\rangle, \langle 1,3,6,4,0,1,2,5,3,7,7,6,5\rangle,$
$\langle 1,3,6,4,0,0,1,2,5,3,7,7,6,5\rangle, \langle 1,3,6,4,1,2,5,3,7,6,5\rangle, \langle 1,3,6,4,1,2,5,3,7,7,6,5\rangle.$

(c) グラフ G_2 において最長の単純道とその長さを求めよ。

答. 単純道 $\langle 0,0,1,3,7,7,6,5,3,6,4,1,2,5,2,4,0\rangle$ は G_2 の一筆書きであるため最長であり、その長さは（G_2 のサイズと同じ）16 である。

(d) グラフ G_2 のサイズと位数を求めよ。

答. サイズは $2 \cdot 8 = 16$、位数は 8 である。

(e) グラフ G_2 の強連結成分をすべて求めよ。

答. 一筆書きが可能なため、G_2 のどの 2 頂点の間にも道が存在する。したがって、G_2 そのものが強連結成分であり、他には存在しない。

問題 3 (木に関する推論)

(a) 高さ h の n 分木の頂点の個数は何個以上何個以下であるか答えよ。

答. $h{+}1$ 個以上である。また、$1{+}n{+}n^2{+}\cdots{+}n^h = \frac{(n-1)\cdot(1+n+n^2+\cdots+n^h)}{n-1} = \frac{(n+n^2+\cdots+n^{h+1})-(1+n+n^2+\cdots+n^h)}{n-1} = \frac{n^{h+1}-1}{n-1}$ 個以下である。

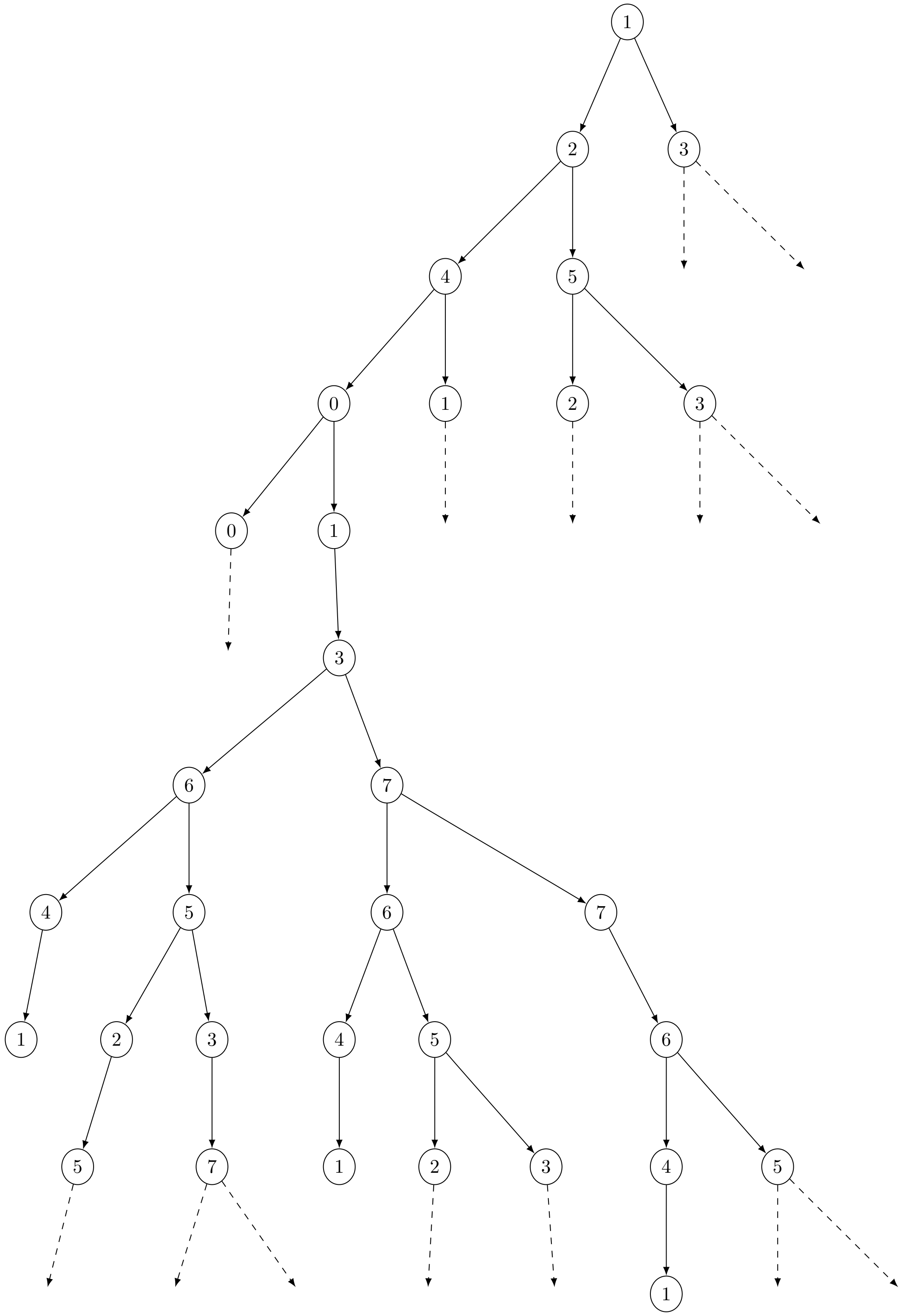

図 3: グラフ G_2 の探索の木 G_3