

『離散構造』演習問題 No.5 (海野)

出題: 2016年11月11日

期限: 2016年11月18日の授業

$\mathcal{N}_n = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < n\}$ とする。 \mathcal{N}_{15} 上の2項関係 R, S, T, U, V を以下のように定める。

$$xRy \Leftrightarrow y = x^3 \pmod{15}$$

$$xSy \Leftrightarrow x \operatorname{div} 3 \leq y \operatorname{div} 3$$

$$xTy \Leftrightarrow y = x + 1$$

$$xUy \Leftrightarrow |x - y| \leq 1$$

$$xVy \Leftrightarrow xSy \wedge ySx$$

ただし、 $a \operatorname{div} b$ は a を b で割った値の小数点以下を切り捨てた自然数を表すものとする。

問題 1 (関係の性質)

- (a) R が反射的、対称的、推移的、反対称的、半順序、同値関係であるか否かをそれぞれ理由をつけて答えよ。反例がある場合はそれを示すこと。
- (b) S について同様のことを答えよ。
- (c) T について同様のことを答えよ。
- (d) U について同様のことを答えよ。
- (e) V について同様のことを答えよ。

問題 2 (関係の合成)

- (a) $R \circ R$ を求めよ。
- (b) $S \circ S$ を求めよ。
- (c) $T \circ T \circ T$ を求めよ。
- (d) $i \in \mathcal{N}$ について T^i を求めよ。

問題 3 (閉包)

- (a) \mathcal{N}_{15} 上の2項関係で、 T を包含し反射的かつ推移的である関係のうち最小のもの (T の反射推移閉包という) を求めよ。また、その関係が半順序関係であるか否かを理由をつけて答えよ。
- (b) \mathcal{N}_{15} 上の2項関係で、 S を包含し対称的である関係のうち最小のもの (S の対称閉包という) を求めよ。また、その関係が同値関係であるか否かを理由をつけて答えよ。