『離散構造』演習問題 No.5 解答例 (海野)

$\mathcal{N}_n = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \le x < n\}$ とする。$\mathcal{N}_{15}$ 上の 2 項関係 R, S, T, U, V を以下のように定める。

$$\begin{aligned} xRy &\Leftrightarrow y = x^3 \bmod 15 \\ xSy &\Leftrightarrow x \text{ div } 3 \le y \text{ div } 3 \\ xTy &\Leftrightarrow y = x + 1 \\ xUy &\Leftrightarrow |x - y| \le 1 \\ xVy &\Leftrightarrow xSy \land ySx \end{aligned}$$

ただし、a div b は a を b で割った値の小数点以下を切り捨てた自然数を表すものとする。

問題 1 (関係の性質)

(a) R が反射的、対称的、推移的、反対称的、半順序、同値関係であるか否かをそれぞれ理由をつけて答えよ。反例がある場合はそれを示すこと。

答. $2\ R\ 2$ でないので R は反射的でない。すべての $x \in \mathcal{N}_{15}$ について $(x^3 \bmod 15)^3 \bmod 15 = x^9 \bmod 15 = x$ が成り立つので R は対称的である。ただし、このことの証明は簡単ではない。もちろん、$\mathcal{N}_{15}$ が有限集合であることを利用して、すべての要素 x について $x^9 \bmod 15 = x$ を満たすことを計算して確認しても良いが、オイラーの定理 [1] と中国剰余定理 [2] を用いると綺麗に証明できる。以下にその証明を示すが、離散構造の扱う範囲から逸脱するので理解しなくてもよい。

> $x = 0$ の場合、明らかに $x^9 \bmod 15 = x$ が成り立つ。次に、$x \ne 0$ かつ x が 15 と互いに素である場合を考えると、オイラーの定理より、$x^9 \bmod 15 = x^{1+(3-1)\cdot(5-1)} \bmod 15 = x^{1+\varphi(15)} \bmod 15 = x$ が導ける。最後に $x \ne 0$ かつ x が 15 と互いに素でない場合を考える。このとき、x は 3 の倍数で 5 と互いに素であるか、5 の倍数で 3 と互いに素であるかのどちらかである。どちらの場合でも同じように証明できるので以下では前者だけ証明する。x は 3 の倍数なので、すべての $k > 0$ について $x^k \bmod 3 = x \bmod 3$ である。したがって $x^{1+\varphi(15)} \bmod 3 = x \bmod 3$ が成り立つ。また、x と 5 は互いに素なので、オイラーの定理より、$x^{1+\varphi(15)} \bmod 5 = x^{1+\varphi(3)\cdot\varphi(5)} \bmod 5 = x \bmod 5$ である。したがって、中国剰余定理より（$a_1 = a_2 = x^{1+\varphi(15)}$ と置いて）$x^{1+\varphi(15)} \bmod 15 = x$ が導かれる。

$2\ R\ 8$ かつ $8\ R\ 2$ だが $2\ R\ 2$ でないので R は推移的でない。$2\ R\ 8$ かつ $8\ R\ 2$ だが $2 \ne 8$ なので R は反対称的でない。以上より、半順序でも同値関係でもない。

(b) S について同様のことを答えよ。

答. x div $3 \le x$ div 3 なので S は反射的である。$0\ S\ 3$ だが $3\ S\ 0$ でないので S は対称的でない。x div $3 \le y$ div 3 かつ y div $3 \le z$ div 3 ならば x div $3 \le z$ div 3 なので S は推移的である。$0\ S\ 1$ かつ $1\ S\ 0$ だが $0 \ne 1$ なので S は反対称的でない。以上より、半順序でも同値関係でもない。

[1] a と n を互いに素（最大公約数が 1）な正の整数とする。このとき、$a^{\varphi(n)} \bmod n = 1$ が成り立つ。ただし、$\varphi(n)$ は n と互いに素な整数 k で $1 \le k \le n$ を満たすものの個数を表す。特に p, q が異なる素数なら $\varphi(p \cdot q) = \varphi(p) \cdot \varphi(q) = (p-1) \cdot (q-1)$ である。

[2] n_1, n_2 が互いに素なとき、$x \bmod n_1 = a_1 \bmod n_1$ かつ $x \bmod n_2 = a_2 \bmod n_2$ かつ $0 \le x < n_1 \cdot n_2$ を満たす x が唯一存在し、そのような x は、$n_1 \cdot X + n_2 \cdot Y = 1$ を満たす整数 X, Y を用いて $(a_1 \cdot n_2 \cdot Y + a_2 \cdot n_1 \cdot X) \bmod (n_1 \cdot n_2)$ と表すことができる。

(c) T について同様のことを答えよ。

答. $0\ T\ 0$ でないので T は反射的でない。$0\ T\ 1$ だが $1\ T\ 0$ ではないので T は対称的ではない。$0\ T\ 1$ かつ $1\ T\ 2$ だが $0\ T\ 2$ ではないので T は推移的ではない。$x\ T\ y$ かつ $y\ T\ x$ となる x, y は存在しないので、T は反対称的である。以上より、半順序でも同値関係でもない。

(d) U について同様のことを答えよ。

答. $|x-x| \leq 1$ はすべての $x \in \mathcal{N}_{15}$ について成り立つので U は反射的である。すべての $x, y \in \mathcal{N}_{15}$ について $|x-y| \leq 1$ ならば $|y-x| \leq 1$ なので U は対称的である。$0\ U\ 1$ かつ $1\ U\ 2$ だが $0\ U\ 2$ ではないので U は推移的ではない。$0\ U\ 1$ かつ $1\ U\ 0$ だが $0 \neq 1$ なので U は反対称的ではない。以上より、半順序でも同値関係でもない。

(e) V について同様のことを答えよ。

答. $xVy \Leftrightarrow x \text{ div } 3 = y \text{ div } 3$ である。$x \text{ div } 3 = x \text{ div } 3$ なので V は反射的である。$x \text{ div } 3 = y \text{ div } 3$ ならば $y \text{ div } 3 = x \text{ div } 3$ なので V は対称的である。$x \text{ div } 3 = y \text{ div } 3$ かつ $y \text{ div } 3 = z \text{ div } 3$ ならば $x \text{ div } 3 = z \text{ div } 3$ なので V は推移的である。$0\ S\ 1$ かつ $1\ S\ 0$ だが $0 \neq 1$ なので V は反対称的でない。以上より、V は半順序ではないが同値関係である。

問題 2 (関係の合成)

(a) $R \circ R$ を求めよ。

答. $R \circ R$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} R \circ R &= \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_{15} \times \mathcal{N}_{15} \mid \exists z(z = x^3 \bmod 15 \wedge y = z^3 \bmod 15)\} \\ &= \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_{15} \times \mathcal{N}_{15} \mid y = x^9 \bmod 15\} \\ &= \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_{15} \times \mathcal{N}_{15} \mid x = y\} \end{aligned}$$

(b) $S \circ S$ を求めよ。

答. $S \circ S$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} S \circ S &= \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_{15} \times \mathcal{N}_{15} \mid \exists z(x \text{ div } 3 \leq z \text{ div } 3 \wedge z \text{ div } 3 \leq y \text{ div } 3)\} \\ &= \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_{15} \times \mathcal{N}_{15} \mid x \text{ div } 3 \leq y \text{ div } 3\} \\ &= S \end{aligned}$$

(c) $T \circ T \circ T$ を求めよ。

答. $T \circ T$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} T \circ T &= \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_{15} \times \mathcal{N}_{15} \mid \exists z(z = x+1 \wedge y = z+1)\} \\ &= \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_{15} \times \mathcal{N}_{15} \mid y = x+2\} \end{aligned}$$

$T \circ T \circ T$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} T \circ T \circ T &= \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_{15} \times \mathcal{N}_{15} \mid \exists z(z = x+2 \wedge y = z+1)\} \\ &= \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_{15} \times \mathcal{N}_{15} \mid y = x+3\} \end{aligned}$$

(d) $i \in \mathcal{N}$ について T^i を求めよ。

答. T^i は以下のようになる。

$$T^i = \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_{15} \times \mathcal{N}_{15} \mid y = x+i\}$$

これが正しいことは i に関する数学的帰納法で証明できる。

問題 3 (閉包)

(a) $\mathcal{N}_{15}$ 上の 2 項関係で、T を包含し反射的かつ推移的である関係のうち最小のもの（T の反射推移閉包という）を求めよ。また、その関係が半順序関係であるか否かを理由をつけて答えよ。

答. T の反射推移閉包は $\bigcup_{i \in \mathcal{N}} T^i$ と求めることができ、これは $\{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_{15} \times \mathcal{N}_{15} \mid \exists i(x + i = y)\} = \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_{15} \times \mathcal{N}_{15} \mid x \leq y\}$ と一致する。$\leq$ は反射的・推移的・反対称的なので半順序関係である。

(b) $\mathcal{N}_{15}$ 上の 2 項関係で、S を包含し対称的である関係のうち最小のもの（S の対称閉包という）を求めよ。また、その関係が同値関係であるか否かを理由をつけて答えよ。

答. T の対称閉包は $T \cup \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_{15} \mid \langle y, x\rangle \in T\}$ と求めることができ、これは $\{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_{15} \times \mathcal{N}_{15} \mid x \text{ div } 3 \leq y \text{ div } 3 \vee x \text{ div } 3 \geq y \text{ div } 3\} = \mathcal{N}_{15} \times \mathcal{N}_{15}$ と等しい。この関係は同値関係である。