離散構造 期末試験 (1,2 クラス用) 誤殖訂正版

2011 年 3 月 4 日 (金)

解答用紙は 2 枚である．**2 枚ともに**，学籍番号と氏名を記入すること．裏を使用してもよい．問題の順番通りに解答を記述する必要はない。それぞれの解答の冒頭には、必ず**問題番号を明記**せよ．全ての解答において、答だけを書くのではなく、その根拠を述べなさい。(ただし、「答だけで良い」と明示された問題を除く。)

問 1 (論理)

ある会社の従業員は、Alice, Bob, Charlie, David, Emily の 5 人であり、彼らの勤務状況については、以下の条件がある。

Alice か Bob の少なくとも一方は勤務する。
Charlie と David のうち、どちらか一方だけが勤務する。
Emily が勤務するなら、Charlie も勤務する。
David と Emily は両方とも勤務するか、あるいは、どちらも勤務しない。
Bob が勤務するなら、Emily と Alice の少なくとも一方は勤務する。

X を 5 人の従業員のいずれかとするとき、「X が勤務する (勤務している)」を表す原子論理式を、単に X と書く。たとえば、Alice という原子論理式は、「Alice が勤務している」という内容を表す。(なお、解答にあたっては Alice 等を、頭文字の A 等で表してもよい。)

(1-a) 上記の 5 つの条件をそれぞれ命題として表現せよ。(答だけで良い。)

(1-b) 上記の 5 つの条件が同時に真となることがあるか。

(1-c) 上記の 5 つの条件がすべて成立するとき、Emily と Alice が 2 人とも勤務することは可能か。

(1-d) 上記の 5 つの条件のうち 1 つだけを変更して、従業員 5 人全員が勤務できるようにしたい。どの条件を変更すればよいか。

問 2 (集合と関数)

$\mathcal{N}$ を自然数の集合とし、$\mathcal{N}_k = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < k\}$ と定義する。$\mathtt{mod}(x, y)$ は、自然数 x を正の自然数 y で割った余りを表す。

関数 $f_n : \mathcal{N}_{10} \to \mathcal{N}_{10}$ と関数 $g : \mathcal{N}_{11} \to 2^{\mathcal{N}_{11}}$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \mathtt{mod}(nx, 10) \\ g(x) &= \{y \in \mathcal{N}_{11} \mid \mathtt{mod}(x^y, 11) = 1\} \end{aligned}$$

(2-a) f_6 による集合 $\mathcal{N}_5$ の像 $f_6(\mathcal{N}_5)$ を求めなさい。

(2-b) $S \subset \mathcal{N}_{10}$ および $T \subset \mathcal{N}_{10}$ とする。この時 $f_n(S - T) = f_n(S) - f_n(T)$ が成立するか否か簡潔な理由とともに答えなさい。

(2-c) $n \in \mathcal{N}_{10}$ とするとき、関数 f_n が全単射となる n の値を全て求めなさい。

(2-d) $g(2)$ と $g(3)$ のそれぞれの値を求めなさい。

(2-e) 全ての $x, y \in \mathcal{N}_{11}$ に対して、$(g(x) \cap g(y)) \subset g(\mathtt{mod}(xy, 11))$ であることを示しなさい。

(2-f) 関数 $h : 2^{\mathcal{N}_{11}} \to \mathcal{N}_{11}$ で、$h \circ g$ が恒等関数 (identity function) となるものがあるか答えなさい。

問 3 (関係とグラフ)

集合 A,B を $A = \{x \in \mathcal{N} \mid 1 \leq x \leq 7\}$、および、$B = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x \leq y\}$ と定義する。また、$\langle x_1, y_1\rangle \in B$ と $\langle x_2, y_2\rangle \in B$ に対して、集合 B 上の二項関係 R を以下のように定義する。

$$\langle x_1, y_1\rangle\ R\ \langle x_2, y_2\rangle \ \Leftrightarrow\ (((y_2 = y_1 - x_1) \wedge (x_2 = x_1)) \vee ((x_2 = y_1 - x_1) \wedge (y_2 = x_1)))$$

たとえば、$\langle 2, 6\rangle\ R\ \langle 2, 4\rangle$ が成立する。なお、$\langle x, y\rangle$ は $x \leq y$ のときのみ B の要素であることに注意せよ。

(3-a) R を有向グラフとして図示しなさい。すなわち、集合 B の要素を頂点とし、$a\ R\ b$ が成立するときに、頂点 a から頂点 b への辺があるとして構成される有向グラフを書きなさい。

(3-b) 上記の有向グラフに閉路 (cycle) があるかどうか答えなさい。

(3-c) R が順序かどうか、また、同値関係かどうか答えなさい。

(3-d) B 上の二項関係 R' を以下のように定義するとき、R' が順序かどうか、また、同値関係かどうか答えなさい。

$\langle x_1, y_1\rangle\ R'\ \langle x_2, y_2\rangle \Leftrightarrow$「上記の有向グラフにおいて、頂点 $\langle x_1, y_1\rangle$ から頂点 $\langle x_2, y_2\rangle$ への道がある」

なお、頂点 $\langle x, y\rangle$ から、その頂点自身への道はいつでも存在する (長さ 0 の道がある) ことに注意せよ。

(3-e) 上記の有向グラフに対して、すべての辺の向きをなくすことにより無向グラフを得る。この無向グラフにおける連結成分の個数を答えなさい。

問 4 (帰納と関数)

集合 RList を次のように帰納的に定義する。ただし、$\langle\rangle$ は空リスト、$\mathcal{R}$ は実数の集合である。

- $\langle\rangle \in \texttt{RList}$.
- $(L \in \texttt{RList} \wedge x \in \mathcal{R}) \Rightarrow \mathrm{cons}(x, L) \in \texttt{RList}$.

また、関数 $f : \texttt{RList} \to \mathcal{R}$ と $g : \texttt{RList} \times \texttt{RList} \to \texttt{RList}$ を以下のように定義する.

$$f(L) = \begin{cases} 1.0 & \text{if } L = \langle\rangle \\ 0.0 & \text{if } L = \mathrm{cons}(0.0, L') \\ x \cdot f(L') & \text{if } L = \mathrm{cons}(x, L') \wedge x \neq 0.0 \end{cases}$$

$$g(L_1, L_2) = \begin{cases} L_1 & \text{if } L_2 = \langle\rangle \\ g(\mathrm{cons}(x, L_1), L_3) & \text{if } L_2 = \mathrm{cons}(x, L_3) \end{cases}$$

ただし、f の定義の $x \cdot f(L')$ における $\cdot$ (点) は、2 つの実数の積 (multiplication) を表す。

これらに対して，以下の問に答えよ.

(4-a) $\mathrm{cons}(2.0, \mathrm{cons}(0.0, \mathrm{cons}(4.0, \langle\rangle))) \in \texttt{RList}$ であることを定義に従って導きなさい。

(4-b) $f(\mathrm{cons}(2.0, \mathrm{cons}(0.0, \mathrm{cons}(4.0, \langle\rangle))))$ を定義に従って計算せよ。

(4-c) $g(\langle\rangle,\ \mathrm{cons}(2.0, \mathrm{cons}(0.0, \mathrm{cons}(4.0, \langle\rangle))))$ を定義に従って計算せよ。

(4-d) 任意の $L_1, L_2 \in \texttt{RList}$ に対して、$f(L_1) \cdot f(L_2) = f(g(L_1, L_2))$ であることを、リスト L_2 に関する帰納法で証明せよ。(注意: L_1 に関する帰納法を使うと証明できない。)

(4-e) 関数 $\texttt{reverse}\colon \texttt{RList} \to \texttt{RList}$ を、$\texttt{reverse}(L) = g(\langle\rangle, L)$ と定義する。このとき、$f(\texttt{reverse}(L)) = f(L)$ であることを示しなさい。