『離散構造』 6 章 (帰納) の演習問題の解答例

亀山

問題 1 (集合の帰納的定義)

(a) 「整数」を表す文字列の集合 S_1 を帰納的に定義せよ．ただし，十進数とする．たとえば，`100` や `-123` は S_1 の要素であり，`0010` や，`3.14` は S_1 の要素ではない．また，その定義は，曖昧さがないか？(1 つの整数に対して，複数の導出はないか？)

(答) 定義は一通りではない。ここでは解答の例を 1 つあげる。

まず、補助的に T という集合を以下のように定める。(この素朴な定義方法では、行数をかなり取るので、ここでは、圧縮して書いている。)

- $1 \in T$, $2 \in T$, $3 \in T$, $4 \in T$, $5 \in T$, $6 \in T$, $7 \in T$, $8 \in T$, $9 \in T$, $-1 \in T$, $-2 \in T$, $-3 \in T$, $-4 \in T$, $-5 \in T$, $-6 \in T$, $-7 \in T$, $-8 \in T$, $-9 \in T$.
- $x \in T \Rightarrow x0 \in T$, $x \in T \Rightarrow x1 \in T$, $x \in T \Rightarrow x2 \in T$, $x \in T \Rightarrow x3 \in T$, $x \in T \Rightarrow x4 \in T$, $x \in T \Rightarrow x5 \in T$, $x \in T \Rightarrow x6 \in T$, $x \in T \Rightarrow x7 \in T$, $x \in T \Rightarrow x8 \in T$, $x \in T \Rightarrow x9 \in T$.

次に T を使って S_1 を次のように定める。

- $0 \in S_1$.
- $x \in T \Rightarrow x \in S_1$.

なお、後半の定義は、$S_1 = T \cup \{0\}$ と書いても同じである。上記の S_1 の定義は、その中で S_1 を使っていないので、「帰納的定義」というほどのことはなく、単なる (普通の) 定義であるが、一応それも帰納的定義の一種である。

この定義の場合、曖昧さはない。

(別の答) 上の答案のうち T の定義は、スペースをたくさん使っているので、もうちょっと節約するため、以下のような解答も考えられる。

D を以下のように定義する。

- $1 \in D$, $2 \in D$, $3 \in D$, $4 \in D$, $5 \in D$, $6 \in D$, $7 \in D$, $8 \in D$, $9 \in D$.

これは、もちろん、$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ と定義するのと同じである。

次に T を以下のように帰納的に定義する。

- $x \in D \Rightarrow x \in T$.
- $x \in D \Rightarrow -x \in T$.
- $x \in T \Rightarrow x0 \in T$.
- $(x \in T \wedge y \in D) \Rightarrow xy \in T$.

最後に、上の 1 つ目の定義と同じように T から S_1 を定義する。(まったく同じなので、省略する。)

この定義にも、曖昧さはない。

(補足) (なお、ここでは、「整数の集合」を定義しているのではなく、「整数をあらわす文字列の集合」を定義している、という微妙な違いがある。もし、「整数の集合を定義すればよいのであれば、単に、「0 は整数である。x が整数ならば $x+1$ と $x-1$ は整数である。」とすれば十分である。しかし、これでは、$0+1+1-1-1+1$ といったものが整数になり、我々が通常「整数」と思っている文字列を定義していることにはならない。)

(b) 「小数」を表す文字列の集合 S_2 を帰納的に定義せよ．ただし，十進数とする．たとえば，100 や 10.1540 や-0.256 は S_2 の要素であり，0010.154 や 10e10 は S_2 の要素ではない．また，その定義は，曖昧さがないか？(1 つの小数に対して，複数の導出はないか？)

(答) 小数をあらわす文字列は、整数をあらわす文字列であるか、あるいは、小数点で区切られた -123.456 のような文字列である。後者は、「整数 + 小数点 + 整数」という文字列に分解できそうであるが、厄介なのは、123.0005 のような小数があることである。(この場合 0005 は、普通は「整数を表す文字列」とは認められない。) そこでこの分の修正をする。

まず、「小数を表す文字列の、小数点より後ろの部分」をあらわす文字列の集合 F を以下のように定義する。(ここでは、定義を簡潔にするため、文字列の後ろから順番に定義している。もちろん前から定義することも可能である。)

- $x \in D \Rightarrow x \in F$.
- $x \in F \Rightarrow 0x \in F$.
- $(x \in F \wedge y \in D) \Rightarrow yx \in F$.

ここで、F には、00123 ははいるが、12300 ははいらないことに注意せよ。

さて、求める集合 S_2 は以下のように定義できる。

- $x \in S_1 \Rightarrow x \in S_2$.
- $y \in F \Rightarrow -0.y \in S_2$.
- $(x \in S_1 \wedge y \in F) \Rightarrow x.y \in S_2$.

2 番目のケースは、-0.123 のような文字列を生成するためのものであり、-0 は S_1 の要素ではないので、別途そのような定義節が必要となっている。

(補足) 言うまでもなく、あくまで、亀山の主観にもとづく「整数や小数をあらわす文字列」である。人によっては、000123 という整数や 100.123000 という小数があっても全然問題ないという人もいるだろう。何を定義したいかによって上記の定義はかわる。

問題 2 (関数の帰納的定義)

次の帰納的定義により、式の集合 E を定める．(本問では，定義される式を，地の文と区別するため「..」で囲うことにする.「」そのものは 式の一部ではないことに注意せよ．)

- 「0」と「1」は式である.
- 「e_1」と「e_2」が式ならば,「$(e_1 \ @ \ e_2)$」 は式である.
- 「e_1」と「e_2」が式ならば,「$(e_1 \ \# \ e_2)$」 は式である.

このように定義された式に対して次の関数 $f : E \to \mathcal{N}$ と $g : E \to E$ を帰納的に定義する.

$$f(e) = \begin{cases} 0 & \text{if } e = \ulcorner 0 \urcorner \\ 1 & \text{if } e = \ulcorner 1 \urcorner \\ f(e_1) \cdot f(e_2) & \text{if } e = \ulcorner (e_1 \ @ \ e_2) \urcorner \\ f(e_1) + f(e_2) - f(e_1) \cdot f(e_2) & \text{if } e = \ulcorner (e_1 \ \# \ e_2) \urcorner \end{cases}$$

$$g(e) = \begin{cases} \ulcorner 1 \urcorner & \text{if } e = \ulcorner 0 \urcorner \\ \ulcorner 0 \urcorner & \text{if } e = \ulcorner 1 \urcorner \\ \ulcorner (g(e_1) \# g(e_2)) \urcorner & \text{if } e = \ulcorner (e_1 \ @ \ e_2) \urcorner \\ \ulcorner (g(e_1) @ g(e_2)) \urcorner & \text{if } e = \ulcorner (e_1 \ \# \ e_2) \urcorner \end{cases}$$

これに対して，以下の問に答えよ.

(a) $f(\ulcorner((0@1)\#(1@1))\lrcorner)$ の値を求めよ.

(答)

$$\begin{aligned} f(\ulcorner((0@1)\#(1@1))\lrcorner) &= f(\ulcorner(0@1)\lrcorner) + f(\ulcorner(1@1)\lrcorner) - f(\ulcorner(0@1)\lrcorner) \cdot f(\ulcorner(1@1)\lrcorner) \\ &= (f(\ulcorner 0\lrcorner) \cdot f(\ulcorner 1\lrcorner)) + (f(\ulcorner 1\lrcorner) \cdot f(\ulcorner 1\lrcorner)) - (f(\ulcorner 0\lrcorner) \cdot f(\ulcorner 1\lrcorner)) \cdot (f(\ulcorner 1\lrcorner) \cdot f(\ulcorner 1\lrcorner)) \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(b) $f(\ulcorner((0\#1)@(1\#1))\lrcorner)$ の値を求めよ.

(答)

$$\begin{aligned} f(\ulcorner((0\#1)@(1\#1))\lrcorner) &= f(\ulcorner(0\#1)\lrcorner) \cdot f(\ulcorner(1\#1)\lrcorner) \\ &= (f(\ulcorner 0\lrcorner) + f(\ulcorner 1\lrcorner) - f(\ulcorner 0\lrcorner) \cdot f(\ulcorner 1\lrcorner)) \cdot (f(\ulcorner 1\lrcorner) + f(\ulcorner 1\lrcorner) - f(\ulcorner 1\lrcorner) \cdot f(\ulcorner 1\lrcorner)) \\ &= 0 + 1 - 0 \cdot 1 \cdot 1 + 1 - 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(c) $g(\ulcorner((0@1)\#(1@1))\lrcorner)$ の値を求めよ.

(答)

$$\begin{aligned} g(\ulcorner((0@1)\#(1@1))\lrcorner) &= \ulcorner(g(\ulcorner(0@1)\lrcorner)@g(\ulcorner(1@1)\lrcorner))\lrcorner \\ &= \ulcorner((g(\ulcorner 0\lrcorner)\#g(\ulcorner 1\lrcorner))@(g(\ulcorner 1\lrcorner)\#g(\ulcorner 1\lrcorner)))\lrcorner \\ &= \ulcorner((1\#0)@(0\#0))\lrcorner \end{aligned}$$

(d) $g(\ulcorner((0\#1)@(1\#1))\lrcorner)$ の値を求めよ.

(答)

$$\begin{aligned} g(\ulcorner((0\#1)@(1\#1))\lrcorner) &= \ulcorner(g(\ulcorner(0\#1)\lrcorner)\#g(\ulcorner(1\#@1)\lrcorner))\lrcorner \\ &= \ulcorner((g(\ulcorner 0\lrcorner)@g(\ulcorner 1\lrcorner))\#(g(\ulcorner 1\lrcorner)@g(\ulcorner 1\lrcorner)))\lrcorner \\ &= \ulcorner((1@0)\#(0@0))\lrcorner \end{aligned}$$

(e) g が E から E への関数であることを確かめなさい.

(答) 任意の式 e に対して、$g(e)$ が式になっている (E に属する) ことを確かめる。

これは、厳密にやるならば、「式に関する帰納法」を使うが、ここでは「証明せよ」ではなく、単に確かめればいいので、それをチェックする。

まず、e が「0」または「1」のとき: $g(e) =$「1」または「0」なので、確かに式である。

e が「$(e_1$ @ $e_2)$」のとき: $g(e_1)$ と $g(e_2)$ は式であると仮定してよいので、$g(e) =$「$(g(e_1)\#g(e_2))$」は式である。(式の帰納的定義より。) よって、OK である。e が「$(e_1$ # $e_2)$」のときも同様である。

(f) (帰納法) 上で定義された式と関数 f に対して,「任意の式 e に対して, $f(e) = 0 \vee f(e) = 1$ である」ことを証明しなさい.

(答) 「式 e に関する帰納法」を使う。(あるいは、「式の構成に関する帰納法」とも言う。)

(Case: e が「0」のとき) $f(e) = 0$ なので、$f(e) = 0 \vee f(e) = 1$ が成立する。

(Case: e が「1」のとき) $f(e) = 1$ なので、$f(e) = 0 \vee f(e) = 1$ が成立する。

(Case: e が「$(e_1$ @ $e_2)$」のとき) 帰納法の仮定 (e より小さな式である e_1 と e_2 に対して、上記の性質が成立していると仮定) より、$f(e_1) = 0 \vee f(e_1) = 1$ と、$f(e_2) = 0 \vee f(e_2) = 1$ が成立する。

f の定義より、$f(e) = f(e_1) \cdot f(e_2)$ であるが、これは、$0 \cdot 0$, $0 \cdot 1$, $1 \cdot 0$, $1 \cdot 1$ のいずれかの計算になり、どの場合でも、$f(e) = 0 \vee f(e) = 1$ が成立する。

(Case: e が「$(e_1 \ \# \ e_2)$」のとき) 帰納法の仮定より、$f(e_1) = 0 \vee f(e_1) = 1$ と、$f(e_2) = 0 \vee f(e_2) = 1$ が成立する。

f の定義より、$f(e) = f(e_1) + f(e_2) - f(e_1) \cdot f(e_2)$ である。$f(e_i)$ が 0 か 1 のいずれかであることを考えると、どの場合でも、$f(e) = 0 \vee f(e) = 1$ が成立することがわかる。

以上より、式に関する帰納法により、すべての式 e に対して、$f(e) = 0 \vee f(e) = 1$ が成立する。(証明おわり)

(g) (帰納法) 上で定義された式と関数 f, g に対して,「任意の式 e に対して，$f(g(e)) + f(e) = 1$ である」ことを証明しなさい.

(答) これも、前問とほぼ同様であり、「式 e に関する帰納法」を使う。

(Case: e が「0」のとき) $f(g(e)) + f(e) = f(\ulcorner 1 \urcorner) + f(\ulcorner 0 \urcorner) = 1 + 0 = 1$ となり成立する。

(Case: e が「1」のとき) 同様に、$f(g(e)) + f(e) = f(\ulcorner 0 \urcorner) + f(\ulcorner 1 \urcorner) = 0 + 1 = 1$ となり成立する。

(Case: e が「$(e_1 \ @ \ e_2)$」のとき) 帰納法の仮定 (e より前に定義された e_1 と e_2 に対して、上記の性質が成立していると仮定) より、$f(g(e_1)) + f(e_1) = 1$ と、$f(g(e_2)) + f(e_2) = 1$ が成立する。

$$\begin{aligned} f(g(e)) + f(e) &= f(g(\ulcorner (e_1 \ @ \ e_2) \urcorner)) + f(\ulcorner (e_1 \ @ \ e_2) \urcorner) \\ &= f(\ulcorner (g(e_1) \ \# \ g(e_2)) \urcorner) + f(\ulcorner (e_1 \ @ \ e_2) \urcorner) \\ &= (f(g(e_1)) + f(g(e_2)) - f(g(e_1)) \cdot f(g(e_2))) + (f(e_1) \cdot f(e_2)) \end{aligned}$$

ここで、帰納法仮定から $f(g(e_1)) = 1 - f(e_1)$ と $f(g(e_2)) = 1 - f(e_2)$ が成立するので、これらを右辺に代入して計算を続ける。

$$\begin{aligned} &= (1 - f(e_1)) + (1 - f(e_2)) - (1 - f(e_1)) \cdot (1 - f(e_2)) + (f(e_1) \cdot f(e_2)) \\ &= (1 - f(e_1)) + (1 - f(e_2)) - (1 - f(e_1)) \cdot (1 - f(e_2)) + (f(e_1) \cdot f(e_2)) \qquad = 1 \end{aligned}$$

よって、この場合、 $f(g(e)) + f(e) = 1$ である。

(Case: e が「$(e_1 \ \# \ e_2)$」のとき) $f(g(e_1)) + f(e_1) = 1$ と、$f(g(e_2)) + f(e_2) = 1$ が成立することを使い、上と同様の計算をする。

$$\begin{aligned} f(g(e)) + f(e) &= f(g(\ulcorner (e_1 \ \# \ e_2) \urcorner)) + f(\ulcorner (e_1 \ \# \ e_2) \urcorner) \\ &= f(\ulcorner (g(e_1) \ @ \ g(e_2)) \urcorner) + f(\ulcorner (e_1 \ \# \ e_2) \urcorner) \\ &= (f(e_1) \cdot f(e_2)) + (f(g(e_1)) + f(g(e_2)) - f(g(e_1)) \cdot f(g(e_2))) \end{aligned}$$

これは、上で計算したものと同じなので、1 に等しい。

以上より、式 e に関する帰納法により、$f(g(e)) + f(e) = 1$ であることが証明できた。

(補足) この問題は、整数上の演算のような顔をしているが、実際には命題論理の論理式の計算を表している。このことを確認してみよう。

まず、false を 0, true を 1, 論理積 (かつ) を @、論理和 (または) を # と対応付ける。すると、f は、論理式の真理値を 0/1 で計算する関数になっていることがわかる。たとえば、$f(\ulcorner (0@1) \urcorner) = 0$ というのは、$false \wedge true$ が $false$ であることを表している。同様に $f(\ulcorner (0\#1) \urcorner) = 1$ というのは、$false \vee true$ が $true$ であることを表している。

$g(e)$ は、e の否定をあらわす論理式を与える。たとえば、$g(\ulcorner 0\#1 \urcorner) = \ulcorner (1@0) \urcorner$ という計算は、$\neg(false \vee true)$ が $(true \wedge false)$ になる (命題論理における de Morgan の法則) を表している。