

『離散構造』 5 章 (グラフ) の演習問題

亀山

問題 1 (無向グラフ)

無向グラフ G_1 を以下のように定める。

- 頂点の集合 $V = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < 14\}$.
- $0 \leq m < 14$ に対して、頂点 m と 頂点 $((5m+1) \bmod 14)$ をつなぐ辺がある。ただし、 $\bmod$ は割算の余りを返す関数とする。(すべての辺は、その形をしている。)

- (a) 頂点 9 と頂点 12 の次数をそれぞれ求めよ。
- (b) 頂点 2 から頂点 8 への道はあるか。道がある場合は、そのような道のうち最短のものの長さも答えよ。(2 つの頂点を結ぶ道の長さの最小値を、2 点間の距離と言う。)
- (c) グラフ G_1 のサイズ (辺の本数) を求めよ。
- (d) グラフ G_1 に閉路 (サイクル) のうち同じ辺を 2 回以上通らないものは何個あるか求めよ。
- (e) グラフ G_1 の連結成分を全て列挙せよ。
- (f) 無向グラフの直径とは、グラフの 2 頂点間の距離の最大値のことである。上記のグラフの直径を求めよ。

問題 2 (有向グラフ)

集合 A を、 $A = \{x \in \mathcal{N} \mid 1 \leq x \leq 20\}$ とする。

有向グラフ G_2 の頂点集合は、 $V = 2^A$ とする。 G_2 において頂点 S_1 から頂点 S_2 への辺があるのは、ある $x, y \in S_1$ に対して、 $S_2 = S_1 \cup \{x + y\}$ である時である。(それ以外に辺はない。)

たとえば、頂点 $\{1\}$ から出る辺は、頂点 $\{1, 2\}$ への辺のみである。また、頂点 $\{1, 5\}$ から出る辺は、頂点 $\{1, 2, 5\}$ への辺、頂点 $\{1, 5, 6\}$ への辺、頂点 $\{1, 5, 10\}$ への辺の合計 3 本ある。

- (a) 頂点 $\{1, 2, 4, 8\}$ にはいる辺と、出る辺を全て示しなさい。
- (b) 頂点 $\{1\}$ から頂点 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ に至る道はあるか？また、存在する場合、その長さ (の最小値) を求めなさい。
- (c) $1 \leq n \leq 20$ とする。 $n \in S$ となる、ある S に対して、頂点 $\{1\}$ から頂点 S への長さ m の道があるとする。
このとき、「かけ算を m 回使って、自然数 N から N^n を計算する方法がある」ことを説明しなさい。(問題修正, 2010/2/3: もとの問題では「 N^m を計算する方法」と書いてあったので、自明な問題になってしまっていました。正しくは、「 N^n を計算する方法」であり、これは、意味のある問題です。たとえば、 N から N^8 を計算するのは、3 回のかけ算で十分です。)
- (d) かけ算だけを使って、自然数 N から N^{15} を計算する場合、かけ算を何回使えばよいか。(なるべく少ない回数で、 N^{15} を計算したい。)

問題 3 (木に関する推論)

どんな木でも、サイズ (辺の数) は、位数 (頂点数) より、ちょうど 1 だけ小さいことを示しなさい。(問題修正, 2010/2/3: もとの問題では「1 だけ大きい」と書いていましたが、もちろんここは「1 だけ小さい」の間違いです。)