

『離散構造』 4 章 (関係) の演習問題

亀山

問題 1 (2 項関係) W を英単語の集合 (ここでは簡単のため、英小文字 (26 文字) からなる 1 文字以上の文字列を英単語とよぶことにする) とし、 W 上の 2 項関係として以下の R_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) を考える。

$$(aR_1b) \Leftrightarrow (a = b) \vee \text{「} a \text{ は } b \text{ より英語の辞書で先に出現」}$$

$$(aR_2b) \Leftrightarrow a \text{ の長さは } b \text{ の長さ以下である}$$

$$(aR_3b) \Leftrightarrow ((aR_1b) \wedge (aR_2b))$$

$$(aR_4b) \Leftrightarrow ((aR_1b) \vee (aR_2b))$$

$$(aR_5b) \Leftrightarrow ((aR_2b) \vee (bR_2a))$$

- (a) R_1 は、順序か、また、同値関係か。(その理由も簡単に述べよ。以下同様。)
- (b) R_2 は、順序か、また、同値関係か。
- (c) R_3 は、順序か、また、同値関係か。
- (d) R_4 は、順序か、また、同値関係か。
- (e) R_5 は、順序か、また、同値関係か。
- (f) 一般に、集合 A 上の 2 項関係 R と R' がともに順序であるとき、 $R \cup R'$ で現わされる 2 項関係は必ず順序になると言えるか。理由をつけて答えよ。($R \cup R'$ は集合としての和集合を意味する。)
- (g) 同様に、 $R \cap R'$ は必ず順序になるか。理由をつけて答えよ。

問題 2 (関係の個数)

- 集合 $\{1, 2, 3\}$ 上の (相異なる) 同値関係は何個あるか。
- 集合 $\{1, 2, 3\}$ 上の (相異なる) 順序は何個あるか。
- 集合 $\{1, 2, 3\}$ 上の (相異なる) 全順序は何個あるか。

問題 3 (関係の合成)

$\mathcal{N}^2 = \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ として、 $\mathcal{N}^2$ 上の 2 項関係 R を次のように定める。

$$\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle \Leftrightarrow ((x_1 = y_1 + x_2 \wedge y_1 = y_2) \vee (y_1 = x_1 + y_2 \wedge x_1 = x_2))$$

- (a) $\langle 5, 3 \rangle R \langle x, y \rangle$ となる $\langle x, y \rangle$ を全て示しなさい。また、 $\langle 10, 3 \rangle R \langle x, y \rangle$ となる $\langle x, y \rangle$ を全て示しなさい。
- (b) $R^2 = R \circ R$, $R^3 = R \circ (R \circ R)$ 等として、 R^n を定義する。「ある $n > 0$ に対して $\langle 10, 3 \rangle R^n \langle x, y \rangle$ 」となる $\langle x, y \rangle$ を全て示しなさい。
(2011/01/28: 亀山. この問題文の最後の方で「。。となる $\langle x, y \rangle$ 」のところが、表示がくずれていました。お詫びします。)
- (c) 「ある $n > 0$ に対して $\langle x, y \rangle R^n \langle z, 0 \rangle$ 」となるとき、 x, y, z の関係を言葉で述べなさい。