

『離散構造』 4章(関係)の演習問題の解答例

亀山

問題 1 (2項関係) W を英単語の集合 (ここでは簡単のため、英小文字 (26 文字) からなる 1 文字以上の文字列を英単語とよぶことにする) とし、 W 上の 2 項関係として以下の R_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) を考える。

$$(aR_1b) \Leftrightarrow (a = b) \vee \text{「}a \text{ は } b \text{ より英語の辞書で先に出現」}$$

$$(aR_2b) \Leftrightarrow a \text{ の長さは } b \text{ の長さ以下である}$$

$$(aR_3b) \Leftrightarrow ((aR_1b) \wedge (aR_2b))$$

$$(aR_4b) \Leftrightarrow ((aR_1b) \vee (aR_2b))$$

$$(aR_5b) \Leftrightarrow ((aR_2b) \vee (bR_2a))$$

(a) R_1 は、順序か、また、同値関係か。

(答) 順序である。(反射律の成立は明らか。推移律は「 a が b と同じか先に出現し、 b が c と同じか先に出現すれば、 a は c と同じか先に出現する」ので成立。反対称律は、「 a が b と同じか先に出現し、 b が a と同じか先に出現すれば、 a は b と同じ単語である」ので成立。)

(答) 同値関係ではない。(「apple R_1 dragon」が成立するが、「dragon R_1 apple」が成立しないので、対称律が成立しない。)

(b) R_2 は、順序か、また、同値関係か。

(答) 順序でない。(「orange R_2 dragon」と「dragon R_2 orange」が成立するのに、orange と dragon は異なる単語なので、反対称律が成立しない。)

(答) 同値関係でない。(対称律が不成立; たとえば apple と dragon)

(c) R_3 は、順序か、また、同値関係か。

(答) 順序である。(反射律の成立は明らか。「 a が b と同じか先に出現し、 a の長さが b の長さ以下で、 b が c と同じか先に出現して、 b の長さが c の長さ以下であれば、 a は c と同じか先に出現して、 a の長さは c の長さ以下」が成立するので、推移律も成立。反対称律も同様。)

(答) 同値関係ではない。(対称律が成立しない。apple と dragon)

(d) R_4 は、順序か、また、同値関係か。

(答) 順序でない。(「dragon R_4 egg」と「egg R_4 apple」が成立するが、「dragon R_4 apple」が成立しないので、推移律が成立しない。)

(答) 同値関係ではない。(「apple R_4 grapefruit だが、grapefruit R_4 apple でないので、対称律が成立しない。)

(e) R_5 は、順序か、また、同値関係か。

(答) 順序でない。(「apple R_5 egg」と「egg R_5 apple」が成立するが、apple と egg は異なるので、反対称律が成立しない。)

(答) 同値関係である。(どんな a, b に対しても aR_5b は成立する。よって、反射律、対称律、推移律は(条件部分に関係なく結論部分がいつでも成立するので) 考えるまでもなく成立する。)

(f) 一般に、集合 A 上の 2 項関係 R と R' がともに順序であるとき、 $R \cup R'$ で現わされる 2 項関係は必ず順序になると言えるか。理由をつけて答えよ。($R \cup R'$ は集合としての和集合を意味する。)

(答) NO. R, R' が順序でも $R \cup R'$ は順序とは限らない。(反例: 自然数上で、 R として $\leq$ をとり、 R' として $\geq$ をとると $R \cup R'$ はすべての自然数を関係付けるが、それは反対称的でないので順序ではない。)

(g) 同様に, $R \cap R'$ は必ず順序になるか. 理由をつけて答えよ.

(答) YES. 以下で証明する. (まず, $x(R \cap R')y$ は, 「 xRy かつ $xR'y$ 」と同値である. これを利用する.)

(反射律を満たす) 任意の $x \in A$ をとり. R, R' は順序なので, それぞれ反射律を満たす. よって, xRx かつ $xR'x$ が成立する. したがって, $x(R \cap R')x$ が成立する.

(推移律を満たす) 任意の $x, y, z \in A$ をとり, $x(R \cap R')y$ かつ, $y(R \cap R')z$ と仮定する. (目標は, $x(R \cap R')z$ を示すことである.)

$x(R \cap R')y$ なので, xRy と $xR'y$ が言える. 同様に, $y(R \cap R')z$ なので, yRz と $yR'z$ が言える.

R は順序なので, 推移律が成立し, xRy と yRz から, xRz が言える. 同様に, R' は順序なので, 推移律が成立し, $xR'y$ と $yR'z$ から, $xR'z$ が言える.

xRz と $xR'z$ が言えたので, $x(R \cap R')z$ が言えた.

(反対称律を満たす) 任意の $x, y \in A$ をとり, $x(R \cap R')y$ かつ, $y(R \cap R')x$ と仮定する. (目標は, $x = y$ を示すことである.)

$x(R \cap R')y$ なので, xRy であり, $y(R \cap R')x$ なので, yRx である. R は順序であり反対称律を満たすので, $x = y$ である.

問題 2 (関係の個数)

- 集合 $\{1, 2, 3\}$ 上の (相異なる) 同値関係は何個あるか。

(答) 集合 A 上の同値関係は, 集合 A を, いくつかの互いに交わりのない部分集合に分割するものである. たとえば, $R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$ という同値関係は, 集合 $\{1, 2, 3\}$ を, $\{1, 2\}$ と $\{3\}$ という 2 つの部分集合に分割する. 逆に, $\{1, 2\}$ と $\{3\}$ という 2 つに分割するとき, 対応する同値関係は, この R_1 である. また, $R_2 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ という同値関係は, 集合 $\{1, 2, 3\}$ を, $\{1\}$ と $\{2\}$ と $\{3\}$ という 3 つの部分集合に分割する.

このことを考えると, 集合 $\{1, 2, 3\}$ をいくつかに分割するやりかたが何通りあるか考えればよいことになる. これは, (a) $\{1, 2, 3\}$ への分割, (b) $\{1, 2\}$ と $\{3\}$ への分割, (c) $\{1, 3\}$ と $\{2\}$ への分割, (d) $\{2, 3\}$ と $\{1\}$ への分割, (e) $\{1\}$ と $\{2\}$ と $\{3\}$ への分割があり, 合計で 5 通りである.

- 集合 $\{1, 2, 3\}$ 上の (相異なる) 順序は何個あるか。

(答) いろいろな場合があるので, 注意深くすべての場合を考えなければいけない.

(3 点がすべて互いに順序付かない場合) これは xRy が $x = y$ と同値になるような順序である. (3 点がばらばら) このような順序は, $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ だけであり, ただ 1 つである.

(2 点が順序付き, 残り 1 点は順序付かない場合) これは, たとえば, $1R2$ だが, 3 は $1, 2$ との間に順序がつかない場合である. (これは, $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$ という順序である.) このようなパターンは, $3 \times 2 = 6$ 通りある.

(1 点が最大で, 残り 2 点は互いに順序付かない場合) 大きい要素を上にして絵を描くと $\wedge$ の形に 3 点が並ぶ場合であり, これは最大値をどれにするかで 3 通りある.

(1 点が最小で, 残り 2 点は互いに順序付かない場合) 絵を描くと $\vee$ の形に 3 点が並ぶ場合であり, これは最小値をどれにするかで 3 通りある.

(全順序になる場合) 次問でやるように, 6 通りである.

以上を合計して, $1 + 6 + 3 + 3 + 6 = 19$ 個ある.

- 集合 $\{1, 2, 3\}$ 上の (相異なる) 全順序は何個あるか。

(答) 全順序になる場合, 3 つの数の順列組合せの数だけある. (なお, 数の大小と, ここで考えたい全順序とは一切関係がないことに注意. つまり, $1R2$ かつ $2R3$ となる必要はなく, $3R1$ かつ $1R2$ となるような全順序でもよい).

結局, 3 個の異なる数を並べる順列組合わせなので, $3! = 6$ 通りである.

問題 3 (関係の合成)

$\mathcal{N}^2 = \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ として, $\mathcal{N}^2$ 上の 2 項関係 R を次のように定める.

$$\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle \Leftrightarrow ((x_1 = y_1 + x_2 \wedge y_1 = y_2) \vee (y_1 = x_1 + y_2 \wedge x_1 = x_2))$$

- (a) $\langle 5, 3 \rangle R \langle x, y \rangle$ となる $\langle x, y \rangle$ を全て示しなさい. また, $\langle 10, 3 \rangle R \langle x, y \rangle$ となる $\langle x, y \rangle$ を全て示しなさい.

(答) $\langle 5, 3 \rangle R \langle x, y \rangle$ となるのは, $x = 2, y = 3$ のときのみである. $\langle 10, 3 \rangle R \langle x, y \rangle$ となるのは, $x = 7, y = 3$ のときのみである.

- (b) $R^2 = R \circ R, R^3 = R \circ (R \circ R)$ 等として, R^n を定義する. 「ある $n > 0$ に対して $\langle 10, 3 \rangle R^n \langle x, y \rangle$ 」となる $\langle x, y \rangle$ を全て示しなさい.

(答) $n = 1, 2, 3 \dots$ に対して計算していくことにより, $\langle x, y \rangle = \langle 7, 3 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle$ となることがわかる.

- (c) 「ある $n > 0$ に対して $\langle x, y \rangle R^n \langle z, 0 \rangle$ 」となるとき, x, y, z の関係を言葉で述べなさい.

(答) z は x と y の最大公約数である.

(補足) 本問では、理由を詳細に述べることは求めているが、一応、ここに書くことにすると以下のようになる。まず、 $\langle x, y \rangle R \langle v, w \rangle$ であれば、 x と y の最大公約数は v と w の最大公約数と一致することがすぐわかる。そこで、 R を繰り返し使って、 $\langle x, y \rangle R^n \langle v, w \rangle$ となるときも、 x と y の最大公約数は、 v と w の最大公約数と一致する。ところで、 z と 0 の最大公約数は z である。(0 は、どんな整数でも割り切れることに注意せよ。)

以上をまとめると、 $\langle x, y \rangle R^n \langle z, 0 \rangle$ ならば、 x と y の最大公約数は、 z と一致することがわかる。