

『離散構造』 3章 (関数) の演習問題
亀山

問題 1 (関数の定義)

\mathcal{R} を実数の集合 (すべての実数からなる集合) とする。以下に示す対応付けは、 \mathcal{R} から \mathcal{R} への関数となるか、また、関数とならない場合、部分関数であるか答えなさい。

- (a) x に対して $\sin x$ を対応付ける。
- (b) x に対して $\frac{1}{x^2 + 1}$ を対応付ける。
- (c) x に対して $x = \cos y$ となる数 y を対応付ける。
- (d) x に対して x が有理数なら 1 を、 x が無理数なら 0 を対応付ける。

問題 2 (像、逆像、単射、全射)

$\mathcal{N}_n = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < n\}$ とする。たとえば、 $\mathcal{N}_3 = \{0, 1, 2\}$ である。

$f: \mathcal{N}_{24} \rightarrow \mathcal{N}_{24}$ と $g: \mathcal{N}_{25} \rightarrow \mathcal{N}_{25}$ となる関数 f と g を次のように定義する。

$$f(x) = (3x + 1) \pmod{24}$$

$$g(x) = (3x + 1) \pmod{25}$$

ただし、 $x \pmod{y}$ は、自然数 x を自然数 y で割った時の余りとする。

- (a) f による 集合 $\{0, 4, 8, 12, 16, 20\}$ の像 $f(\{0, 4, 8, 12, 16, 20\})$ を求めなさい。
- (b) g による 集合 $\{0, 5, 10, 15, 20\}$ の像 $g(\{0, 5, 10, 15, 20\})$ を求めなさい。
- (c) f による 集合 $\{0\}$ の逆像 $f^{-1}(\{0\})$ と、 g による 集合 $\{0\}$ の逆像 $g^{-1}(\{0\})$ を求めなさい。
- (d) f は単射か、また、全射か。
- (e) g は単射か、また、全射か。
- (f) f および g に、それぞれ逆関数はあるか。
- (g) $a \in \mathcal{N}_{25}$ に対して、 $h_a: \mathcal{N}_{25} \rightarrow \mathcal{N}_{25}$ となる関数 h_a を $h_a(x) = (ax) \pmod{25}$ で定義する。関数 h_a たちの中で、互いに逆関数となる組を全て示しなさい。
- (h) k を自然数とし、関数 g を k 回合成した関数を g^k とする。たとえば、 $g^3 = g \circ g \circ g$ である。関数 g^k たちの中で、互いに逆関数となるものがあるか調べなさい。

(以下は発展課題である。)

問題 3 (関数プログラミング)

以下の等式をすべて満たす関数 $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ が存在するかどうか調べよ。

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 2$$

$$f(x) = f(x-2) + f(x-1) \text{ if } x > 1$$

そのような関数 f が存在する場合、その f は単射か、また、全射か。