

『離散構造』 3 章 (関数) の演習問題の解答例

亀山

問題 1 (関数の定義)

以下に示す対応付けは、 $\mathcal{R}$ から $\mathcal{R}$ への関数となるか、また、関数とならない場合、部分関数であるか答えなさい。

- (a) x に対して $\sin x$ を対応付ける。

答: $\mathcal{R}$ から $\mathcal{R}$ への関数となる。(従って部分関数でもある。) どんな実数 x に対しても $\sin x$ は実数として一意に定まるから。

- (b) x に対して $\frac{1}{x^2 + 1}$ を対応付ける。

答: $\mathcal{R}$ から $\mathcal{R}$ への関数となる。(従って部分関数でもある。) どんな実数 x に対しても $\sin x$ は実数として一意に定まるから。 $(x^2 + 1 = 0$ となることがあると、対応する実数が定まらないが、 x が実数であるかぎり、 $x^2 + 1 > 0$ なので問題ない。)

- (c) x に対して $x = \cos y$ となる数 y を対応付ける。

答: 関数でも部分関数でもない。たとえば、 $x = 1$ に対応する実数 y が、 $y = 0, 2\pi$ など 2 個以上あるから。

- (d) x に対して x が有理数なら 1 を、 x が無理数なら 0 を対応付ける。

答: $\mathcal{R}$ から $\mathcal{R}$ への関数となる。(従って部分関数でもある。) 実数 x は有理数と無理数のいずれかであるので、そのどちらのケースでも対応付けられる実数が一意的に定まるから。

[補足: ただし、このような関数はグラフに書こうとおもっても書けないし、微分できないどころか連続でもないので、あまり使い道はない。]

問題 2 (像、逆像、単射、全射)

$\mathcal{N}_n = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < n\}$ とする。たとえば、 $\mathcal{N}_3 = \{0, 1, 2\}$ である。

$f: \mathcal{N}_{24} \rightarrow \mathcal{N}_{24}$ と $g: \mathcal{N}_{25} \rightarrow \mathcal{N}_{25}$ となる関数 f と g を次のように定義する。

$$f(x) = (3x + 1) \bmod 24$$

$$g(x) = (3x + 1) \bmod 25$$

ただし、 $x \bmod y$ は、自然数 x を自然数 y で割った時の余りとする。

- (a) f による 集合 $\{0, 4, 8, 12, 16, 20\}$ の像 $f(\{0, 4, 8, 12, 16, 20\})$ を求めなさい。

答: $x = 0, 4, 8, 12, 16, 20$ のとき、 $f(x)$ の値を求めると、それぞれ $1, 13, 1, 13, 1, 13$ となる。よって、 $f(\{0, 4, 8, 12, 16, 20\}) = \{1, 13\}$ である。

- (b) g による 集合 $\{0, 5, 10, 15, 20\}$ の像 $g(\{0, 5, 10, 15, 20\})$ を求めなさい。

答: $x = 0, 5, 10, 15, 20$ のとき、 $g(x)$ の値を求めると、それぞれ $1, 16, 6, 21, 11$ となる。よって、 $g(\{0, 5, 10, 15, 20\}) = \{1, 6, 11, 16, 21\}$ である。

- (c) f による 集合 $\{0\}$ の逆像 $f^{-1}(\{0\})$ と、 g による 集合 $\{0\}$ の逆像 $g^{-1}(\{0\})$ を求めなさい。

答: $f(x) = 0$ となる $x \in \mathcal{N}_{24}$ を求めよう。 $f(x) = 0$ から、 $3x + 1 = 24k$ となる整数 k が存在する。しかし、この等式の左辺は 3 で割って 1 余り、右辺は 3 の倍数なので、等式が成立することはない。よって、そのような x は存在しないので、 $f^{-1}(\{0\}) = \{\}$ である。

次に、 $g^{-1}(\{0\})$ を求める。上記と同様に、 $g(x) = 0$ となる $x \in \mathcal{N}_{25}$ を求めればよい。 $g(x) = 0$ から、 $3x + 1 = 25k$ となる整数 k が存在する。これが成立するのは、 $x = 8$ のときのみであるよって、 $g^{-1}(\{0\}) = \{8\}$ である。

- (d) f は単射か、また、全射か。

答. f は単射でない。たとえば、 $f(0) = f(8) = 1$ であるから。

また、 f は全射でない。前問の解答で $f(x) = 0$ となる $x \in \mathcal{N}_{24}$ が存在しないことを既にチェックした。

- (e) g は単射か、また、全射か。

答. g は単射である。このためには、 $g(0), g(1), \dots, g(24)$ を全て計算して、相異なることを示せばよい。

参考 (g が単射であることの別の証明): $g(x) = g(y)$ ならば $x = y$ を示す。

$g(x) = g(y)$ と仮定すると、 $(3x+1) - (3y+1) = 25k$ となる整数 k が存在する。よって、 $3(x-y) = 25k$ である。左辺は 3 の倍数なので、 k も 3 の倍数である。しかし、 $x, y \in \mathcal{N}_{25}$ であるので、 $k = 0$ でなければいけない。 $(k = 3$ や $k = -3$ となると、 $|x-y| = 25$ となってしまう、 $0 \leq x, y < 25$ の範囲におさまらない。) $k = 0$ なので、 $x = y$ である。よって、 g は単射である。

答. g は全射である。これを示すためにも、 $g(0), g(1), \dots, g(24)$ を全て計算して、 $0, 1, \dots, 24$ の値がすべて出現することを示せばよい。(なお、 g の定義域とコドメインは同じ有限集合なので、単射であれば必ず全射である。)

- (f) f および g に、それぞれ逆関数はあるか。

答. f は全単射でないので、逆関数は存在しない。 g は全単射なので、逆関数は存在する。

補足: この問題では、 g の逆関数を具体的に与えよとは書いていないが、せっくなので考えてみよう。 g の逆関数を h とすると、 $h((3x+1) \bmod 25) = x$ である。従って、 h は「24 を加えて、17 倍する」とちょうど元にもどる。すなわち、 $h(x) = 17(x+24) \bmod 25$ である。これは、 $h(x) = (17x+8) \bmod 25$ と書くこともできる。この h に対して、 $h(g(x)) = x$ かつ $g(h(x)) = x$ となることのチェックは、皆さんに委ねる。

- (g) $a \in \mathcal{N}_{25}$ に対して、 $h_a : \mathcal{N}_{25} \rightarrow \mathcal{N}_{25}$ となる関数 h_a を $h_a(x) = (ax) \bmod 25$ で定義する。関数 h_a たちの中で、互いに逆関数となる組を全て示しなさい。

答. $a, b \in \mathcal{N}_{25}$ に対して、 h_a と h_b が逆関数と仮定する。すると、任意の $x \in \mathcal{N}_{25}$ に対して、 $h_a(h_b(x)) = x$ となる。つまり、 $abx - x = 25k$ となる整数 k が存在する。 $x = 1$ のときを考えると $ab - 1$ が 25 の倍数でなければいけないことがわかる。このような a, b の組は、 $(1, 1), (2, 13), (3, 17), (4, 19), (6, 21), (7, 18), (8, 22), (9, 14), (11, 16), (12, 23), (24, 24)$ の 11 組ある。

逆に、これら 11 組はすべて、互いに逆関数となる。

- (h) k を自然数とし、関数 g を k 回合成した関数を g^k とする。たとえば、 $g^3 = g \circ g \circ g$ である。関数 g^k たちの中で、互いに逆関数となるものがあるか調べなさい。

答. $k = 1, 2, 3, \dots$ に対して $g^k(0)$ を計算すると、 $1, 4, 13, 15, 21, 14, 18, 5, 16, 24, 23, 20, 11, 9, 3, 10, 6, 19, 8, 0$ となり、20 回で一周する。

この数列に含まれない 2 から始めて、 $g^k(2)$ を計算すると、 $7, 22, 17, 2$ となり、4 回で一周する。

これらの数列に含まれない 12 は、 $g(12) = 12$ となり、1 回で一周する。

$\mathcal{N}_{25}$ の要素で、この 3 つの数列に含まれないものはない。

よって、 k が $(1, 4, 20)$ の最小公倍数である 20 の倍数であるとき、 g^k が恒等関数 $g^k(x) = x$ となる。

よって、 g^i と g^j が逆関数となるのは、 $i + j$ が 20 の倍数となる時である。(たとえば $i = 3$ なら、 $j = 17, 37, 57, \dots$ である。)

問題 3 発展課題 (関数プログラミング)

以下の等式をすべて満たす関数 $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ が存在するかどうか調べよ。

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 2$$

$$f(x) = f(x-2) + f(x-1) \text{ if } x > 1$$

そのような関数 f が存在する場合、その f は単射か、また、全射か。

答. 存在する (上記の等式を満たす対応付けは関数である。)

f は、単射である。なぜなら、 $x < y$ のとき、必ず、 $f(x) < f(y)$ であることがいえるので。(狭義の単調増加である。)

f は、全射ではない。なぜなら、 $f(x) = 4$ となる x は存在しない。

[補足] 関数 f が生成する数列は、Fibonacci 数列と呼ばれる。(正確には、Fibonacci は、上記のように $1, 2, 3, 5, \dots$ でなく、 $1, 1, 2, 3, 5, \dots$ という数列である。)

[補足の補足] 最後の問題が、なぜ「関数プログラミング」かといえは、この種の関数定義を組み合わせでプログラムを作るスタイルだからである。参考までに、いくつかの言語で上記の関数 f を定義してみる。

Scheme (Lisp に類似):

```
(define (fib x)
  (case x
    ((0) 1)
    ((1) 2)
    (else (+ (fib (- x 1)) (fib (- x 2))))))
```

Objective Caml (ML の一種):

```
let rec fib = function
  | 0 -> 1
  | 1 -> 2
  | x -> fib (x-1) + fib (x-2)
```

Haskell:

```
fib 0 = 1
fib 1 = 2
fib x = fib (x-1) + fib (x-2)
```

皆さんは、どれが好みのスタイルだろうか。