『離散構造』2章の演習問題の解答例

亀山

以下の演習問題は、次回の演習実施日までに解答を用意せよ。

問題 1 (述語論理)

(解答前に解説) この問題は、ちょっと気合いがはいり過ぎて難しくし過ぎてしまった。以下の問題が完全に解けるようになるためには、2 年生の「論理と形式化」の授業で、何度も演習を行わないといけないであろう。今回の「離散構造」の授業としては、そこまでは求めないので、この問題ができなかったからといって、がっかりしないでほしい。($\forall$ と $\exists$ が両方とも現れる論理式は考えにくいので、現段階では理解できなくてもよい。)

(1-a) 「ロバを飼っている人は，幸せである.」を、$D(x,y)$: 「x さんが y というロバを飼う」と $H(x)$: 「x さんが幸せである」を使って表現せよ。

解答例. 「ロバを飼っている人は，幸せである.」というのは、「ロバを飼っている人の中に，幸せな人が 1 人以上いる.」という意味ではなく、「ロバを飼っている人は、すべて，幸せである.」という意味だと考えられる．言いかえれば、「どんな人でも、ロバを飼っているならば、幸せである.」という意味だと考えられる。(このように日本語では「すべて」が明示されないことが多い。)

そこで、$\forall x.\ (D(x,y) \Rightarrow H(x))$. と表現するのが良さそうに思える。

しかし、この問題はまだもう少し考察が必要である。というのは、この論理式では、「y というロバを飼っている人は、みな、幸せである。」ということになってしまう。実際に表したいのは、「y というロバを飼っている」ではなく、「1 匹以上ロバを飼っている」ということなので、$\exists y.\ D(x,y)$ としたい。

以上のことをまとめると、$\forall x.\ ((\exists y.\ D(x,y)) \Rightarrow H(x))$. と表現できるとわかる。(解答)

[補足] 論理学を知っている人がいれば、この論理式は、$\forall x.\ \forall y.\ (D(x,y) \Rightarrow H(x))$. と同値であることを知っているだろう。こちらでも正解である。これを文字通り読めば、「どんな人 x と、どんなロバ y に対しても、もし、x が y を飼っていれば、x は幸せである」という意味になる。これが、「ロバを飼っている人は，幸せである.」という日本語の文と同じ意味になることは、各自チェックしてほしい。

(1-b) 「x は素数である」という論理式を，$s = t$ および $s \leq t$ という形の論理式を基本命題として使って表現しなさい.

解答例. 「x は素数である」というのは、「x は 2 以上であって、その約数は 1 と x 自身しかない。」ということであるので、その方針で表現する。(ただし、以下の表現では、x が整数である、ということは省略する。)

(i) 「x は 2 以上である」$\cdot\cdot$ $x \geq 2$.

(ii) 「y が x を割り切る」$\cdot\cdot$通常は、「割り切る」ことを意味する記号を使って $(y|x)$ と表現するが、ここでは、この記号を使わないで表現する必要がある。これは、かけ算と等式を使って、$\exists z.(x = yz)$ と表現することができる。

(iii) 「もし、y が x を割り切れば y は 1 か x である」$\cdot\cdot$ $(\exists z.(x = yz)) \Rightarrow ((y = 1) \vee (y = x))$.

(iv) 「任意の 1 以上の整数 y に対して、。。。」$\cdot\cdot$ $\forall y.\ ((y \geq 1) \Rightarrow \cdots)$.

以上をまとめると、以下の論理式を得る。(解答例)

$$(x \geq 2) \wedge (\forall y.\ ((y \geq 1) \Rightarrow ((\exists z.(x = yz)) \Rightarrow ((y = 1) \vee (y = x))))).$$

問題 2 (集合の演算)

以下の各項目における集合たちが、互いに等しいかどうか判定せよ。(等しい場合はその根拠を述べ、等しくない場合は具体的な反例をあげよ。)

(a) 集合 $(A \cap B) \cup C$ と集合 $A \cap (B \cup C)$.

(解答例) 両者は必ずしも等しくない。その反例としては、(少し考えると、$C - (A \cup B)$ が空集合にならない場合が反例となるので)、たとえば、$A = B = \{\}, C = \{1\}$ である。この時、$(A \cap B) \cup C = \{1\}$ で、$A \cap (B \cup C) = \{\}$ となるので、一致しない。

(b) 集合 $(A - B) \cup B$ と集合 $A \cup B$.

(解答例) 両者は等しい。

その根拠としては、まず、$((A - B) \cup B) \subset (A \cup B)$ は明らかである。(なぜなら $(A - B) \subset A$ は明らかなので、その両辺について、B との和集合を取れば、$\subset$ の関係が成立するので。)

逆方向である $(A \cup B) \subset ((A - B) \cup B)$ の根拠を述べる。(「根拠を述べる」ためには、結局は、きちんと証明をするしかないが、ここでは概略を述べる。)

$A \cup B$ の要素は、$A - B$ の要素であるか、$A \cap B$ の要素であるか、$B - A$ の要素であるか、いずれかである。$A - B$ の要素であったら明らかに $((A - B) \cup B)$ の要素にもなり、$A \cap B$ や $B - A$ の要素であったら B の要素であるので、やはり、$((A - B) \cup B)$ の要素にもなる。結局、どの場合でも、$((A - B) \cup B)$ の要素になるので、$(A \cup B) \subset ((A - B) \cup B)$ である。

(c) 集合 $(A \cap B) \times C$ と集合 $(A \times C) \cap (B \times C)$.

(解答例) 両者は等しい。

その根拠としては、集合 $(A \cap B) \times C$ の要素は、$\langle x, y \rangle$ の形であって、かつ、$x \in (A \cap B)$、$y \in C$ であるが、集合 $(A \times C) \cap (B \times C)$ の要素も、まったく同じ形をしているからである。

(d) 集合 $2^{A \times B}$ と集合 $2^A \times 2^B$.

(解答例) 両者は必ずしも等しくない。$A = \{1\}$, $B = \{2\}$ とすると、$2^{A \times B} = \{\{\}, \{\langle 1, 2 \rangle\}\}$ であり、$2^A \times 2^B = \{\langle \{\}, \{\} \rangle, \langle \{\}, \{2\} \rangle, \langle \{1\}, \{\} \rangle, \langle \{1\}, \{2\} \rangle\}$ であるので、両者は一致しない。

問題 3 (有限集合の要素数)

A が有限集合のとき、$\#A$ は A の要素数をあらわす。(なお、A の要素数を $|A|$ と書くこともある。)

このとき、$\#(A \cup B \cup C)$ を、$\#A$、$\#B$、$\#C$、$\#(A \cap B)$, $\#(B \cap C)$, $\#(C \cap A)$, $\#(A \cap B \cap C)$ を使って表せ。

(解答例) まず、2 つの集合の和集合 $X \cup Y$ について考えると $\#(X \cup Y) = \#X + \#Y - \#(X \cap Y)$ となる。

この式を使って、$\#(A \cup B \cup C)$ を計算する。まず、上式で、$X = A \cup B$, $Y = C$ と置いた式、$X = A$, $Y = B$ と置いた式、および、$X = (A \cap C)$, $Y = (B \cap C)$ と置いた式をつくると、以下の 3 つの式を得る。

$$\#((A \cup B) \cup C) = \#(A \cup B) + \#C - \#((A \cup B) \cap C)$$
$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$
$$\#((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \#(A \cap C) + \#(B \cap C) - \#((A \cap C) \cap (B \cap C))$$

これらを使って以下のように計算することができる。

$$\begin{aligned}
\#(A \cup B \cup C) &= \#(A \cup B) + \#C - \#((A \cup B) \cap C) \\
&= \#(A \cup B) + \#C - \#((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\
&= (\#A + \#B - \#(A \cap B)) + \#C - (\#(A \cap C) + \#(B \cap C) - \#((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\
&= \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(B \cap C) - \#(C \cap A) + \#(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

この計算の途中で、$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ という性質を使った。

問題 4 (集合に関する推論)

任意の集合 A, B, C に対して以下の命題が成立するかどうか調べ、証明あるいは反証せよ。

$$(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$$

解答例。 正しいので証明する。集合に関する等式の定義より、「任意の x に対して、 $x \in (A \cup B) - (B \cup C)$ ならば $x \in (A - B) - C$」と、「任意の x に対して、$x \in (A - B) - C$ ならば $x \in (A \cup B) - (B \cup C)$」の 2 つを証明すればよい。

1. 「任意の x に対して、 $x \in (A \cup B) - (B \cup C)$ ならば $x \in (A - B) - C$」の証明。

$x \in (A \cup B) - (B \cup C)$ と仮定する。すると、$-$ および $\cup$ の定義により、「「$x \in A$ または $x \in B$」 かつ 「$x \in B$ でも $x \in C$ でもない。」」ということがわかる。これは、「$x \in A$ かつ $x \notin B$ かつ $x \notin C$」と同じであるので、$x \in (A - B) - C$ が導ける。

2.「任意の x に対して、$x \in (A - B) - C$ ならば $x \in (A \cup B) - (B \cup C)$」の証明。

$x \in (A - B) - C$ と仮定する。すると、「$x \in A$ かつ $x \notin B$ かつ $x \notin C$」である。

$x \in A$ であるので、$x \in (A \cup B)$ である。また、$x \notin B$ かつ $x \notin C$ であるので、$x \notin (B \cup C)$ である。以上の 2 つのことから、$-$ の定義により、$x \in (A \cup B) - (B \cup C)$ である。

以上により、問題文にある等式は証明された。(証明終わり)