

『離散構造』 Short Quiz の解答例

2010.12.03 (亀山)

**Short Quiz 1.** (この問の答えは、下の余白部分に書きなさい。)

論理式 (命題) の「長さ」とは、それに含まれる論理記号の数であるとする。なお、「かっこ」はカウントしない。

長さ  $n$  の命題論理式が与えられたとき、その真理値表のサイズは、最大でどれだけになるか。縦方向と横方向のサイズの最大値をそれぞれ答えなさい。

**解答.** 真理値表の縦方向のサイズ、すなわち、「行 (row) の数」は、各々の基本命題に対する真理値の割り当てパターンの数と一致する (「見出し」に相当する行は、ここでは、数えないことにする。) これは、基本命題が  $m$  個あるとき、 $2^m$  個ある。長さ  $n$  の命題論理式が与えられたとき、そこには、最大  $n+1$  個の基本命題が含まれるので、結局、「真理値表の行数」の最大値は、 $2^{n+1}$  である。

真理値表の横方向のサイズ、すなわち、「列 (column) の数」は、真理値表の書き方によって異なってくる。ここでは、丁寧に「すべての部分論理式の真理値を記載する」方式で行こう。(これは、もっともサイズが大きくなる場合である。)

ところで、部分論理式とは何であろうか? きちんとした定義は、論理学の授業に譲ることにして、ここでは、例をあげて説明すると、 $(A \wedge (B \vee C)) \Rightarrow D$  の部分論理式は、 $(A \wedge (B \vee C)) \Rightarrow D$ ,  $A \wedge (B \vee C)$ ,  $D$ ,  $A$ ,  $B \vee C$ ,  $B$ ,  $C$  の 7 個ある。

さて、論理式に対して、その部分論理式の数、最大いくつあるだろうか? よく考えると、「その論理式に含まれる論理記号の総数と、基本命題の総数の和に一致する」ということがわかる。(ただし、同じものが 2 回出てきても 2 個と数えることにする。) つまり、長さ  $n$  の論理式の、部分論理式の数、最大で、 $2n+1$  個である。

答え. 行数の最大値は  $2^{n+1}$ , 列数の最大値は  $2n+1$  である。