

『離散構造』1章の演習問題の解答例

2010.12.10 (亀山)

問1前半. 次の文章を論理式で表現せよ。(基本命題の取り方は適宜おこなうこと)

「コンピュータサイエンス専攻における修士号を取得するためには、単位の要件と修士論文の要件の2つを満足する必要がある。単位の要件は、必修科目 A, 必修科目 B, 必修科目 C の3つを履修することのほか、選択科目の単位を18単位以上修得することである。また、修士論文の要件は、修士論文を提出し、修士論文審査会で発表し、修士論文の審査に合格することである。」

問1前半の解答例. 基本命題として以下のものを取る。

- M コンピュータサイエンス専攻における修士号を取得する(取得できる)。
- L 単位の要件を満たす。
- T 修士論文の要件を満たす。
- A 必修科目 A を履修する。
- B 必修科目 B を履修する。
- C 必修科目 C を履修する。
- E_{18} 選択科目を18単位以上修得する。
- S 修士論文を提出する。
- P 修士論文審査会で発表する。
- Q 修士論文の審査に合格する。

すると、上記の文章は、以下の3つの論理式として表現できる。

$$M \Rightarrow (L \wedge T)$$

$$L \Leftrightarrow (A \wedge B \wedge C \wedge E_{18})$$

$$T \Leftrightarrow (S \wedge P \wedge Q)$$

よって、文章全体を1つの論理式で表現すると、

$$(M \Rightarrow (L \wedge T)) \wedge (L \Leftrightarrow (A \wedge B \wedge C \wedge E_{18})) \wedge (T \Leftrightarrow (S \wedge P \wedge Q))$$

となる。

問1前半の解答例の補足。

問題の1つ目の文「修士号を取得するためには。。。」を論理式に直したものとして、 $M \Leftrightarrow (L \wedge T)$ と答えた人も多いと予想される。しかし、これは以下の意味で正解とはいえない。

上記の日本語は、「修士号を取るために、単位の要件と修士論文の要件は必要である」としか言っていないので、ひょっとすると、それ以外にも条件があるかもしれないのである。従って、上記の問題文の記述であれば、 $M \Rightarrow (L \wedge T)$ ではあるが、 $M \Leftrightarrow (L \wedge T)$ であるとは限らない。

(注: 2010年度の「大学院便覧」では、「CS専攻の修士取得要件は、単位の要件と修士論文の要件を満たすことである」と書いてあるので、こちらの日本語であれば、「 $M \Leftrightarrow (L \wedge T)$ 」が成立する。)

1つ目の文については、 $(L \wedge T) \Rightarrow M$ と間違えてしまうことも多い。これでは、「単位の要件と修士論文の要件を両方満たせば、修士号が取得できる」(十分条件)を意味することになってしまうので、日本語の文とは合致しない。

一方、問題の2,3番目の文については、逆に、 $\Rightarrow$ でなく $\Leftrightarrow$ を使う。なぜかといえば、「...であるためには...であることが必要だ」という表現ではなく、「...であることは、...であることだ」と表現なので、2つのものが「同値」であるからである。

問1後半. 次の文章を論理式で表現せよ。(基本命題の取り方は適宜おこなうこと)

「コンピュータサイエンス専攻における修士号を取得するためには、上記で定められた要件を満たすか、あるいは専修コースの要件を満たすことが必要である。専修コースの要件は、必修科目 D, 必修科目 E, 必修科目 F の 3 つを履修することと、選択科目の単位を 38 単位以上修得することである。」

問 1 後半の解答例。

以下の基本命題を追加する。

I 専修コースの要件を満たす。

D 必修科目 D を履修する。

E 必修科目 E を履修する。

F 必修科目 F を履修する。

E_{38} 選択科目を 38 単位以上修得する。

すると、追加分を加えた文章全体は、以下の 4 つの論理式として表現できる。

$$M \Rightarrow ((L \wedge T) \vee I)$$

$$L \Leftrightarrow \dots \text{前問と同じ}$$

$$T \Leftrightarrow \dots \text{前問と同じ}$$

$$I \Leftrightarrow (D \wedge E \wedge F \wedge E_{38})$$

文章全体を 1 つの論理式で表現するには、これら 4 つの論理式を $\wedge$ でつなげればよい。

問 2 前半

(2010/12/09 訂正: 以下の問題で、「積和標準形」と書いてあるのは「和積標準形 (Conjunctive Normal Form)」の間違いでした。これは「論理積標準形」とも言います。なお、授業で使った「例題」も同じように言葉遣いを間違っていますので、その通りに理解すれば、この問題は解けます。)

$n = 3$ のとき、次の形の命題を、論理積標準形に変形しなさい。ただし、 A_i, B_i は基本命題とする。

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_n)$$

問 2 前半の解答例 第 1 章の「例題」に書いてある以下の 2 つの同値性を使う。

$$((A \wedge B) \vee C) \Leftrightarrow ((A \vee C) \wedge (B \vee C))$$

$$(C \vee (A \wedge B)) \Leftrightarrow ((C \vee A) \wedge (C \vee B))$$

これらを使って以下のように同値変形できる。

$$((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \vee ((B_1 \wedge B_2) \wedge B_3)$$

$$\Leftrightarrow ((A_1 \wedge A_2) \vee ((B_1 \wedge B_2) \wedge B_3)) \wedge (A_3 \vee ((B_1 \wedge B_2) \wedge B_3))$$

$$\Leftrightarrow ((A_1 \vee ((B_1 \wedge B_2) \wedge B_3)) \wedge (A_2 \vee ((B_1 \wedge B_2) \wedge B_3))) \wedge (A_3 \vee ((B_1 \wedge B_2) \wedge B_3))$$

ここで、 $A_i \vee ((B_1 \wedge B_2) \wedge B_3)$ は、以下のように変形できる。

$$A_i \vee ((B_1 \wedge B_2) \wedge B_3) \Leftrightarrow (A_i \vee (B_1 \wedge B_2)) \wedge (A_i \vee B_3)$$

$$\Leftrightarrow ((A_i \vee B_1) \wedge (A_i \vee B_2)) \wedge (A_i \vee B_3)$$

よって、最初の命題と同値な論理積標準形は、以下の通りである。(省略しても問題ない括弧は、省略した。)

$$\begin{aligned}
& (A_1 \vee B_1) \wedge (A_1 \vee B_2) \wedge (A_1 \vee B_3) \\
& \wedge (A_2 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_3) \\
& \wedge (A_3 \vee B_1) \wedge (A_3 \vee B_2) \wedge (A_3 \vee B_3)
\end{aligned}$$

問 2 後半 一般の n に対して、上記の論理式を論理積標準形に同値変形したものの長さ (含まれる論理記号の個数) を計算しなさい。

問 2 後半の解答例 一般の n の場合、その論理積標準形は、 $\bigwedge_{1 \leq i, j \leq n} (A_i \vee B_j)$ という形になる。これは、 $(A_i \vee B_j)$ の形の論理式を $\wedge$ でつないだものである。また、 i, j は 1 から n までのすべての組み合わせをわたる。そこで、論理積標準形に含まれる $\vee$ の個数は n^2 個であり、 $\wedge$ の個数は $n^2 - 1$ 個となり、論理記号の総数は合計で、 $2n^2 - 1$ 個となる。

問 3 新しい論理記号として $\text{maj}(a, b, c, d, e)$ を導入する (maj は majority を意味する)。ただし、この記号は、5 つの引数を取り、その真理値を以下のように定める。

- a, b, c, d, e のうち過半数が真であれば、全体も偽。
- a, b, c, d, e のうち過半数が偽であれば、全体も真。

(a) $\text{maj}(a, a, a, a, a)$ が $\neg a$ と同値であることを示せ。

解答例 真理値表を書いてもよいが、スペースの節約のため、言葉で説明する。同値であることを示すには、 a が真のときと偽のときとで、2 つの命題が同じ真理値を持つことを言えばよい。

(Case 1) a が真のとき、 $\text{maj}(a, a, a, a, a)$ は (その定義により) 偽であり、 $\neg a$ も偽である。

(Case 2) a が偽のとき、 $\text{maj}(a, a, a, a, a)$ は (その定義により) 真であり、 $\neg a$ も真である。

よって、いずれの場合でも真偽が一致するので、2 つの論理式は同値である。

(b) $\text{maj}(a, b, T, T, F)$ はどういう命題と同値か?

解答例に先立って解説 「どういう命題と同値か」というのは、問題文としてはずいぶん雑な書き方であり、たとえば、「 $\text{maj}(a, b, T, T, F)$ 」 $\neg$ 、「 $\text{maj}(b, a, T, T, F)$ 」 $\neg$ 、「 $\text{maj}(T, F, a, T, b)$ 」なども同値である。もちろん、これらが答えになるようでは、ほとんど意味のない問題であるが、もしこれが期末試験であれば、(出題が雑なのがいけないので) これらも正解にせざるを得ない。

ただ、皆さんも推測できたと思うが、この問題の出題意図は、正確には、「 maj を使わない命題で、同値なものを求めよ」ということにあるので、以下では、その範囲で考えてみる。

解答例 $\text{maj}(a, b, T, T, F)$ は、「 a と b のどちらか一方、あるいは、両方が T ならば、全体は F になり、両方とも F ならば、全体は T 」ということがわかる。これは、 $\neg(a \vee b)$ という命題と同値である。(あるいは、 $(\neg a) \wedge (\neg b)$ という命題でもよい。他にも、これと同値な命題は無限にたくさんある。)

(c) $\text{maj}(a, b, T, F, F)$ はどういう命題と同値か?

解答例 前問と同様に考えると、この命題は、 a と b の両方が T のとき、全体が F になり、そうでないとき全体が T になる。よって、 $\neg(a \wedge b)$ と同値である。あるいは $(\neg a) \vee (\neg b)$ と同値である。

(d) $a \vee b$ と同値な命題を、 maj と T と F と a と b だけで作れ。

解答例 前問までで、 $\neg a$ と $\neg(a \vee b)$ や $\neg(a \wedge b)$ を作ることに成功しているので、それらをうまく組み合わせて $a \vee b$ という命題を作ればよい。

$a \vee b$ は、 $\neg((\neg a) \wedge (\neg b))$ と同値であるので、 $\text{maj}(\text{maj}(a, a, a, a, a), \text{maj}(b, b, b, b, b), T, F, F)$ という命題が得られる。これが $a \vee b$ と同値であるかどうか確認するためには、真理値表を作ればよい。

解答例その2 本問も、無限にたくさんの解答があるが、もっと短い例としては、 $\text{maj}(\text{maj}(a, a, b, b, T), T, T, F, F)$ がある。

- (e) $a \Rightarrow b$ と同値な命題を、 maj と T と F と a と b だけで作れ。

解答例 $a \Rightarrow b$ は、 $(\neg a) \vee b$ と同値であり、これは $\neg(a \wedge (\neg b))$ と同値なので、 $\text{maj}(a, \text{maj}(b, b, b, b, b), T, F, F)$ となる。(他にも同値な式はある。)

- (f) maj と a と b だけをつかって、 $a \vee b$ と同値な命題を作ることができるか？

解答例に先立って解説 この問題の答は「作れない」である。

この種の問題の場合、「作れる」ことの証明は簡単である。つまり、実際に作ってみせればよいからである。一方、「どうやっても作れない」ことの証明は難しい。ここでは、ちょっと真面目に書いてみるが、現時点では、これが完全には理解できなくてもよい。(この問題は、全員必須ではなく、発展課題に相当する問題である。解けた人は偉い!!)

証明したいこと: maj と a と b だけをつかった論理式は、 $a, b, \neg a, \neg b$ のいずれかと同値である。(それ以外の論理式は作れない。)

証明: まず、「 maj を1回だけ使い、 a と b と $\neg a$ と $\neg b$ および、それらと同値な論理式を何回でも使ってできる論理式は a と b と $\neg a$ と $\neg b$ のいずれかと同値である」ということを示す。

ここで考えているのは、 $\text{maj}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ の形の論理式で、 x_i が、 $a, b, \neg a, \neg b$ のいずれかと同値な式、という場合である。以下のような場合分けをして証明する。

(Case 1) $x_1, \dots, x_5$ の中に、 $a, b, \neg a, \neg b$ のいずれかと同値な式が3回以上含まれる場合は、それが「多数派」となり、 $\text{maj}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ は、その論理式の否定と同値になる。(たとえば、 x_1, x_2, x_3 が $\neg a$ と同値の場合、 $\text{maj}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ は a と同値である。)

(Case 2) $x_1, \dots, x_5$ の中に、 $a, b, \neg a, \neg b$ の4種類の命題と同値な式が、順不同で、2回-1回-1回-1回あらわれるとき。

2回あらわれる命題を c とすると、 c が「多数派」となり、 $\text{maj}(x_1, \dots, x_5)$ 全体は $\neg c$ と同値であることがわかる。

(Case 3) $x_1, \dots, x_5$ の中に、 $a, b, \neg a, \neg b$ の4種類の命題と同値な式が、順不同で、2回-2回-1回-0回あらわれるとき。

この場合は、さらに場合分けが必要となり若干面倒だが、場合分けをきちんと行えば、4種類のいずれかの論理式 c に対して、全体が $\neg c$ と同値であることが言える。

以上から、 maj を1回だけ使っても、 a と b と $\neg a$ と $\neg b$ のいずれかと同値な論理式しか作れないことがわかる。従って、これを何回繰返しても a と b と $\neg a$ と $\neg b$ のいずれかと同値な論理式しか作れない。(証明終わり)

ここで証明した事実から、 $a \vee b$ と同値な論理式はどうやっても作れないことがわかる。($a \vee b$ は、 $a, \neg a, b, \neg b$ のいずれとも同値ではないので。)

補足 証明の最後の部分を厳密に証明するには、数学的帰納法を使う。これは第6章で勉強する予定である。

以下に書いたものは、今回の「離散構造」の授業の範囲で理解する必要はないが、より発展的でコンピュータサイエンスに関係する話題についてメモしたものである。

問1前半の解答例の補足の補足. 1つ目の正解例の「 $M \Leftrightarrow (L \wedge T)$ 」という論理式を素朴に読むと、「修士号を取れたら、単位の要件を満たし、かつ、修士論文の要件を満たす」となってしまう、原因と結果が逆に見えてしまい、違和感を持つ人も多いだろう。実際にはそんなことはなく、正しい読み方は、「修士号を取れた人は、単位の要件を満たし、かつ、修士論文の要件を満たしている」あるいは「修士号を取れた人で、単位の要件を満たしていない人はいないし、修士論文の要件を満たしていない人はいない」ということである。これならば、違和感はないだろう。

このように、日本語における「ならば」は、「原因と結果」や「時間的順序関係」に関係することもあり、それらの情報は、論理の「ならば」では表現されないので、論理式を素朴に読んでしまうと、ギャップ(違い)に悩むことがある。このギャップとして、有名な例は、以下のものである。

- 「A君は、怒られなければ勉強しない。」つまり、「 $\neg(\text{怒られる}) \Rightarrow \neg(\text{勉強する})$ 」が成立する。
- この事と同値な命題は、「 $(\text{勉強する}) \Rightarrow (\text{怒られる})$ 」である。
- この命題を素朴に読むと、「A君は勉強すると、怒られる」となる(!?)

どうして、このようになったか、理由を考えてみると面白い。

問2後半の解答例の補足 本問でわかるように、命題を、それと同値な論理積標準形に変形すると、非常にサイズが大きくなってしまふことがある。論理式を使って種々の情報科学的問題を解こうとすると、このように、サイズがものすごく大きくなってしまふは、使用するメモリも多くなるし、処理時間もかかってしまう。

そこで、論理式に関する処理を高速で行ないたい場合はもっと工夫する必要がある。たとえば、「ソフトウェアサイエンス概論1」で述べたように、数独パズルを「SATソルバ」を使う場合は、ほとんどの「SATソルバ」が論理積標準形しか受け付けられないので、前処理として、論理積標準形への変形をしなければいけない。「SATソルバ」の実行速度は、入力となる論理積標準形の大きさに、おおむね比例所以说われているので、論理積標準形を小さく抑えることが重要である。

そこでどうするか、であるが、実は、「元の論理式と同値ではないが、充足可能性に関して同値な論理積標準形への変換」ということができるのである。この変換は、うまくやれば、「元の論理式に比例するサイズの論理積標準形」へ変換することができるので、種々の問題を現実的な時間で解くことが可能になる。(元の論理式のサイズを n とすると、適当な定数 C に対して、論理積標準形のサイズが Cn で抑えられる場合、線形 (linear) という。一方、 Cn^2 や $C2^n$ は、これよりかなり大きく、 n が大きくなると、とても処理しきれなくなる。

ここで「論理的には同値ではないが、充足可能性は同値」という、わけのわからない概念を持ちだした。簡単にいえば、 $A \Leftrightarrow B$ が恒真な場合が、「 A と B が同値」であるが、「 A が充足可能であることと、 B が充足可能であることが同値」というのが、「充足可能性は同値」ということである。これについて詳しい事を知りたい人は、教員に質問するか、あるいは、将来、3-4年生の「システム検証論」の授業を受講してほしい。