『離散構造』 1章の例題

問 1-1 (命題論理による表現)
例題にならって、次の文を論理式で表現せよ。ただし、各問題ごとに指定された基本命題を使うこと。

(a) 「雨が降っていたら，A 君は傘を持っていく。」
基本命題として，P=「雨が降っている」, Q=「A 君は傘を持っていく」とすれば、「$P \Rightarrow Q$」という命題で表現することができる。

(b) 「A 君は怒られなければ勉強しない.」と「A 君が勉強したら怒られた.」(基本命題: P=「A 君が怒られる」、Q=「A 君が勉強する」)

(c) 「授業が面白いか，単位が欲しければ，授業に出席する.」(基本命題: P=「授業が面白い」、Q=「単位が欲しい」、R=「授業に出席する」)

問 1-2 (述語論理による表現)
例題にならって、次の文を論理式で表現せよ。

(a) 「x は平方数である (ある整数の 2 乗になっている)。」

(b) 「筑波大学の 1 年生の中には、誕生日が同じ人が 1 組以上いる。」(基本命題: P(x)=「x さんは筑波大学の 1 年生である」、Q(x,y,z)=「x さんの誕生日は y 月 z 日である」)

(c) 「x は y と z の最小公倍数である」(基本命題: $x|y$=「x は y を割り切る (y は x の倍数である)」

問 2
真理値表に関する以下の問いに答えよ。

(a) 命題 $A \wedge B$ の否定の真理値表と、命題 $(\neg A) \vee (\neg B)$ の真理値表が等しくなることを確認せよ。このことを通して、命題「x と y が奇数である」を否定すると、命題「x が奇数でないか、または、y が奇数でない」となることを確認せよ。

(b) 命題 A, B をそれぞれ $(C \Rightarrow D)$, $(\neg D) \Rightarrow (\neg C)$ と置いたときの真理値表を書くことにより、この命題 A と命題 B は同値となることを確かめよ。また、同時に、この命題 A, B について命題 $A \Leftrightarrow B$ を求めると、常に真となることも確かめよ。

(c) 命題 $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$ の真理値表を作成し、恒真式となるか否かを確認せよ。

問 3
以下の式の両辺は、論理的に同値である。

$$
\begin{aligned}
(\neg(\neg A)) &\Leftrightarrow A \\
(\neg(A \wedge B)) &\Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B)) \\
(\neg(A \vee B)) &\Leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B)) \\
(A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow ((\neg A) \vee B) \\
(A \Leftrightarrow B) &\Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \\
((A \wedge B) \vee C) &\Leftrightarrow ((A \vee C) \wedge (B \vee C)) \\
(C \vee (A \wedge B)) &\Leftrightarrow ((C \vee A) \wedge (C \vee B))
\end{aligned}
$$

上記の同値性を利用して、以下の命題を「和積標準形 (Conjunctie Normal Form)」に変形せよ。(2010/12/09 訂正: Conjunctive Normal Form という言葉の日本語訳を間違えていました。これは和積標準形です。授業では、間違って「積和標準形」と言ってしまいました。)

- $(A \wedge B \wedge C) \vee (D \wedge E)$.
- $\neg((A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D))$.

ただし、和積標準形とは以下の形の命題のことである。

$$(L_{1,1} \vee L_{1,2} \vee \cdots \vee L_{1,n}) \wedge \cdots \wedge (L_{k,1} \vee L_{k,2} \vee \cdots \vee L_{k,n'})$$

(ただし、各 $L_{i,j}$ は、基本命題か、基本命題に否定記号 ($\neg$) をつけたものに限る。)

問 4 以下の文を論理式 (命題) で表現した上で，証明もしくは反証せよ．ただし，反証とは正しくないことを証明することである．

(a) 連続した 3 つの自然数をかけた数は，6 で割り切れる．

(b) 7 で割り切れない自然数の 6 乗は，7 で割ると 1 余る．

(c) 任意の自然数に対して、それより大きな素数が存在する (注: これは「素数は無限にたくさんある」ことを意味する)。

問 5 (発展的な問題)

以下の論理式が常に正しいかどうか，理由をつけて述べよ．

- $(\exists y.\forall x.P(x,y)) \Rightarrow (\forall x.\exists y.P(x,y))$
- $(\forall x.\exists y.P(x,y)) \Rightarrow (\exists y.\forall x.P(x,y))$