

『離散構造』1章の例題の解答

問 1-1 (命題論理による表現)

例題にならって、次の文を論理式で表現せよ。ただし、各問題ごとに指定された基本命題を使うこと。

- (a) 「雨が降っていたら、A 君は傘を持っていく。」

基本命題として、 P = 「雨が降っている」、 Q = 「A 君は傘を持っていく」とすれば、「 $P \Rightarrow Q$ 」という命題で表現することができる。

- (b) 「A 君は怒られなければ勉強しない」と「A 君が勉強したら怒られた」(基本命題: P = 「A 君が怒られる」、 Q = 「A 君が勉強する」)

前者は、「 $(\neg A) \Rightarrow (\neg Q)$ 」である。後者は、「 $Q \Rightarrow P$ 」である。

[補足] この2つの論理式に対する真理値表を書けばわかるように、2つの論理式は同値である。これは、言語を研究する人にとっては有名な問題であり、「A 君は怒られなければ勉強しない」という場合に、「A 君が勉強したら怒られた」ということになってしまう、という不思議な現象である。

もちろん、よく考えてみれば、不思議なことはない。日本語の文は「時制」があり、時間的順序関係が含まれているのに対して、論理式に直したときに、時間の情報が失われてしまったのが問題である。実際には、「 $Q \Rightarrow P$ 」という論理式の意味は、「A 君が勉強したら怒られた」ではなく、「A 君が勉強しているとしたら、(それより前に)怒られたからだ」という意味になり、これならば、何も矛盾はない。

この種の話が好きな人は、自然言語処理(文系の学問の意味ではなく、コンピュータを使った自然言語処理という意味である)の分野へ進むのが良いだろう。

- (c) 「授業が面白い、単位が欲しければ、授業に出席する」(基本命題: P = 「授業が面白い」、 Q = 「単位が欲しい」、 R = 「授業に出席する」)

これは、「 $(P \vee Q) \Rightarrow R$ 」となる。

問 1-2 (述語論理による表現)

例題にならって、次の文を論理式で表現せよ。

- (a) 「 x は平方数である(ある整数の2乗になっている)。」

「 y は整数である」という基本命題を「 $\text{int}(y)$ 」と略記すると、上記の文は、 $\text{int}(y) \wedge x = y^2$ という命題になりそうである。しかし、これでは x だけでなく、 y にも依存する命題となってしまう。問題文は x のみについて書いてあるので、これでは良くない。

述語論理の範囲まで広げると、「 $\exists y. (\text{int}(y) \wedge x = y^2)$ 」と記述できる。このように書けば、「ある y について... が成立する」という命題になり、 y には依存しない。

- (b) 「筑波大学の1年生の中には、誕生日が同じ人が1組以上いる。」(基本命題: $P(x)$ = 「 x さんは筑波大学の1年生である」、 $Q(x,y,z)$ = 「 x さんの誕生日は y 月 z 日である」)

授業では、「 $\exists x_1. \exists x_2. (P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge (x_1 \neq x_2) \wedge \text{birthday}(x_1) = \text{birthday}(x_2))$ 」とした。

この問題では、 birthday を使ってはいけないので、さらに複雑になる。

「 $\exists x_1. \exists x_2. \exists y. \exists z. (P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge (x_1 \neq x_2) \wedge Q(x_1, y, z) \wedge Q(x_2, y, z))$ 」

- (c) 「 x は y と z の最小公倍数である」(基本命題: $x|y$ =「 x は y を割り切る (y は x の倍数である)」
「 $y|x \wedge z|x$ 」までは、容易だろう。しかし、これでは、「最小」であることが表現できていない。
「ある性質を満たすものの中で最小」というのは結構難しい。答えは以下の通り。

$$\lceil (y|x \wedge z|x) \wedge \forall w. ((y|w \wedge z|w) \Rightarrow x \leq w) \rceil$$

これの右の方は、「もし w が y, z の公倍数であれば、 $x \leq w$ である」という性質が、どんな w に対しても成立する、ということなので、 x が公倍数の中で最小であることを表現できている。

(なお、この問題はちょっと難し過ぎるので、期末試験の範囲からは除外してよい。)

問 2

真理値表に関する以下の問いに答えよ。

- (a) 命題 $A \wedge B$ の否定の真理値表と、命題 $(\neg A) \vee (\neg B)$ の真理値表が等しくなることを確認せよ。このことを通して、命題「 x と y が奇数である」を否定すると、命題「 x が奇数でないか、または、 y が奇数でない」となることを確認せよ。

真理値表は以下の通り。

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

命題 A を「 x が奇数である」、命題 B を「 y が奇数である」とすると、 $A \wedge B$ は、「 x と y が奇数である」となり、 $(\neg A) \vee (\neg B)$ は、「 x が奇数でないか、または、 y が奇数でない」となる。上記の真理値表より、前者の否定と後者は同値である。

- (b) 命題 A, B をそれぞれ $(C \Rightarrow D)$, $(\neg D) \Rightarrow (\neg C)$ と置いたときの真理値表を書くことにより、この命題 A と命題 B は同値となることを確かめよ。また、同時に、この命題 A, B について命題 $A \Leftrightarrow B$ を求めると、常に真となることも確かめよ。

真理値表は以下の通り。

C	D	$C \Rightarrow D$	$\neg D$	$\neg C$	$(\neg D) \Rightarrow (\neg C)$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

- (c) 命題 $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$ の真理値表を作成し、恒真式となるか否かを確認せよ。

真理値表は以下の通り。

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	全体
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T	T

問 3

命題 $(A \wedge B \wedge C) \vee (D \wedge E)$ の和積標準形の計算は以下の通り。(以下の計算では、書き換えの 1 ステップを矢印 ($\rightsquigarrow$) で表現している。)

$$\begin{aligned}(A \wedge B \wedge C) \vee (D \wedge E) &\rightsquigarrow (A \vee (D \wedge E)) \wedge (B \vee (D \wedge E)) \wedge (C \vee (D \wedge E)) \\ &\rightsquigarrow (A \vee D) \wedge (A \vee E) \wedge (B \vee D) \wedge (B \vee E) \wedge (C \vee D) \wedge (C \vee E)\end{aligned}$$

命題 $\neg((A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D))$ の和積標準形の計算は以下の通り。

$$\begin{aligned}\neg((A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D)) &\rightsquigarrow \neg((\neg(A \wedge B)) \vee (C \vee D)) \\ &\rightsquigarrow \neg(\neg(A \wedge B)) \wedge \neg(C \vee D) \\ &\rightsquigarrow (A \wedge B) \wedge ((\neg C) \wedge (\neg D)) \\ &\rightsquigarrow A \wedge B \wedge (\neg C) \wedge (\neg D)\end{aligned}$$

問 4 以下の文を論理式 (命題) で表現した上で、証明もしくは反証せよ。ただし、反証とは正しくないことを証明することである。

- (a) 連続した 3 つの自然数をかけた数は、6 で割り切れる。

このような問題は、まず、「すべての、連続した 3 つの自然数について、。。。。」であるか、「ある、連続した 3 つの自然数について、。。。。」であるか、を見分けなければいけない。一見すると難しそうであるが、数学的な定理の場合は、ほとんど常に、「すべての」が隠れている。ここでもそうである。

よって、「 $\forall x. 6|(x(x+1)(x+2))$ 」となりそうである。しかし、ここで「自然数」という条件を書きわすれた。これは、 $\text{Nat}(x)$ により「 x は自然数である」という命題を表すことにすると、最終的に、「 $\forall x. (\text{Nat}(x) \Rightarrow 6|(x(x+1)(x+2)))$ 」となる。

これが正しいかどうかであるが、連続した 2 つの整数の積は 2 で割り切れ、連続した 3 つの整数の積は 3 で割り切れるので、連続した 3 つの整数の積は 6 で割り切れる。よって正しい。

- (b) 7 で割り切れない自然数の 6 乗は、7 で割ると 1 余る。

以下の通りである。

$$\forall x. ((\text{Nat}(x) \wedge \neg(7|x)) \Rightarrow \exists y. (\text{Nat}(y) \wedge x^6 = 7y + 1))$$

正しいので証明する。まず、「 x^6 を 7 で割った余り」は、「 x を 7 で割った余り」の 6 乗を 7 で割った余りと等しい。 x は 7 で割り切れないので、「 x を 7 で割った余り」は 1,2,3,4,5,6 のいずれかである。これらを 6 乗して 7 で割ってみると、余りは、1,1,1,1,1,1 となるので、いずれのケースでも 7 で割ると 1 余る。

なお、この問題は、Fermat の (小) 定理の具体的な例である。

- (c) 任意の自然数に対して、それより大きな素数が存在する。

命題としての表現は、単純であり、

$$\forall x. \exists y. ((x < y) \wedge \text{Prime}(y))$$

となる。その証明は省略する。

問 5 (発展的な問題)

以下の論理式が常に正しいかどうか、理由をつけて述べよ。

- $(\exists y. \forall x. P(x, y)) \Rightarrow (\forall x. \exists y. P(x, y))$

真である。 $\Rightarrow$ の前の部分論理式 (「 $\Rightarrow$ の前提」と言う) が真であるとき、どんな x に対しても、 $P(x, y)$ が成立する y が存在する。この y のことを y_0 と書くことにする。

$\Rightarrow$ の後の部分論理式において、「どんな x に対しても、上記の y_0 をとってくれば $P(x, y_0)$ が成立する」のだから、 $\forall x. \exists y. P(x, y)$ は真である。

以上から、どんな $P(x, y)$ に対しても上記の命題が成立する。

- $(\forall x. \exists y. P(x, y)) \Rightarrow (\exists y. \forall x. P(x, y))$

[ヒント: x, y を自然数を表す変数とし、 $P(x, y)$ を「 $x = y$ 」や「 $x < y$ 」などとしてみるとよい.]

$P(x, y)$ を $x < y$ と置いてみると、 $\forall x. \exists y. P(x, y)$ は、「どんな自然数 x に対しても、それより大きい自然数 y が存在する」という意味になり、これは真である。($y = x + 1$ と取れば良い。)

一方、 $\exists y. \forall x. P(x, y)$ は、「どんな自然数 x よりも大きい自然数 y が存在する」という意味になり、そんな自然数は存在しないので偽である。

$\Rightarrow$ の前提が真で、帰結が偽なので、全体としては、偽である。

$P(x, y)$ を $x < y$ と置いてみた場合だけであっても、偽となるケースがある、ということは、最初の論理式は「常に正しくはない」ということになる。