

『離散構造』6章(帰納)の演習問題

2010.2.19, 亀山

(2010.2.16, 最後の問題をわずかに修正しました)

問題1 (集合の帰納的定義)

- (a) $\Sigma = \{a, b, c\}$ とするとき, Σ 上の文字列で, 前から読んでも後ろから読んでも同じ文字列となるものの集合 A を帰納的に定義せよ. ただし, 空文字列も含むとする.
- (b) 自然数のリスト (要素が全て自然数であるリスト) の中で, 要素が昇順に並んでいるものの集合を帰納的に定義せよ. ただし, 空リストも含むとする.

問題2 (帰納的定義に関する導出) 次の帰納的定義により, p 式の集合 P を定める. (本問では, 定義される p 式を, 地の文と区別するため「 $\cdot$ 」で囲うことにする.「」そのものは p 式の一部ではないことに注意せよ.)

- 「1」, 「2」, $\dots$, 「10」は, p 式である.
 - 「 e_1 」と「 e_2 」が P 式ならば, 「 $e_1 e_2 +$ 」は p 式である.
 - 「 e_1 」と「 e_2 」が P 式ならば, 「 $e_1 e_2 -$ 」は p 式である.
- (a) 「1 2 3 + -」が p 式であることを示せ. (直感的に示すのではなく, 導出を一步一步丁寧に示しなさい.)
 - (b) 「1 2 3 + - +」が p 式であるかどうか, 理由とともに示せ.
 - (c) 「1 2 3 4 5 + - + -」が p 式であるかどうか, 理由とともに示せ.
 - (d) p 式の文法には曖昧さが無い. すなわち, どんな p 式に対しても, それが p 式であることを示す導出は1通りしかない. このことの理由を示せ.

問題3 (関数の帰納的定義)

前問で定義した集合 P に対して $f: P \rightarrow \mathcal{N}$ となる関数 f と $g: P \rightarrow \mathcal{Z}$ となる関数 g を以下のように定義する.

$$f(e) = \begin{cases} 1 & \text{if } e = \text{「1」, 「2」, } \dots, \text{「10」} \\ f(e_1) + f(e_2) + 1 & \text{if } e = \text{「} e_1 e_2 + \text{」} \\ f(e_1) + f(e_2) + 1 & \text{if } e = \text{「} e_1 e_2 - \text{」} \end{cases}$$
$$g(e) = \begin{cases} e & \text{if } e = \text{「1」, 「2」, } \dots, \text{「10」} \\ g(e_1) + g(e_2) & \text{if } e = \text{「} e_1 e_2 + \text{」} \\ g(e_1) - g(e_2) & \text{if } e = \text{「} e_1 e_2 - \text{」} \end{cases}$$

これに対して, 以下の問に答えよ.

- (a) $f(3\ 2\ 1\ +\ -)$ の値を求めよ.
- (b) $g(3\ 2\ 1\ +\ -)$ の値を求めよ.
- (c) 任意の p 式 e に対して, $f(e)$ が奇数であることを, p 式に関する帰納法を使って証明せよ.
- (d) 任意の p 式 e に対して, $|g(e)| \leq 5f(e) + 5$ であることを, p 式に関する帰納法を使って証明せよ. (出題時点では, 左辺が $g(e)$ でしたが, 2010.2.16 に, 左辺に絶対値を取って $|g(e)|$ に変更しました. もとの問題も正しい内容ではありますが, これをそのまま帰納法で証明しようと思うと, ちょっと落とし穴があるので, 絶対値記号をつけました.)