『離散構造』 Short Quiz
2010.02.05 (亀山)

この用紙に short quiz の解答を書いて提出しなさい。

学籍番号:
氏名:

Short Quiz 1. 学生が 6 人いる。その上の二項関係として「友達関係」がある。具体的に誰と誰が友達かはわからない (適当に決まっている)。友達関係なので、当然、対称的 (symmetric) である。

さて、この 6 人の中には、「互いに (どの二人も) 友達である 3 人」か、「互いに (どの二人も) 友達でない 3 人」かが存在することを示しなさい。

(注: これは、二項関係の問題ではなく、グラフの問題である。)

解答例 (いろいろな解答がある。ここでは素朴な場合分けでやる)

学生を頂点とし、友達関係がある 2 頂点間を辺で結んだグラフ G を考える。G の頂点を a,b,c,d,e,f とする。「どの 2 頂点間も辺がある 3 頂点」を「正の三角形」、「どの 2 頂点間も辺がない 3 頂点」を「負の三角形」と呼び、これらが G にないとして矛盾を導く。

まず、準備として、1 つの頂点 x と、それ以外の 3 頂点 y, z, w を取ったとき、xy, xz, xw に辺がないとしたら、矛盾することを言おう。これらに辺がないとしたら、「負の三角形」がないという条件から、yz,zw,wy に辺がなければならないが、そうすると、これら 3 辺からなる「正の三角形」ができてしまう。(同様に、xy, xz, xw に辺があるとしたら、矛盾する。)

上記の準備のもとに証明を開始する。G には辺が 1 本以上あるので (辺が 0 本なら負の三角形がある)、それを ab とする。頂点 c は、a と b の少なくとも一方との間で辺がない。(両方辺があったら、正の三角形ができるので。) 同様に頂点 d,e,f も a と b の少なくとも一方との間で辺がない。しかし、準備でやったことから、a との間で辺がない頂点が 3 個あったら矛盾するし、b との間でも同様である。

よって、一般性を失うことなく、ab, bc, bd, ae, af に辺があり、ac, ad, be, bf に辺がない、という状況であることがわかる。しかし、cd 間に辺があれば、bcd が正の三角形になり、cd 間に辺がなければ、acd が負の三角形になり、いずれにせよ矛盾である。

以上から、どうやっても矛盾するので、G は正の三角形か負の三角形のいずれかを持つ。(証明おわり)