

『離散構造』 5 章 (グラフ) の演習問題

2010.2.5, 亀山

問題 1 (グラフ)

無向グラフ G を以下のように定める。

- G の頂点は、 $\langle x, y \rangle$ という名前を持ち、 $0 < x < 50$ かつ $0 < y < 50$ である。
- $\langle x, y \rangle$ と $\langle x + y, y \rangle$ が両方とも G の頂点であれば、それらの間に辺がある。
- $\langle x, y \rangle$ と $\langle x, x + y \rangle$ が両方とも G の頂点であれば、それらの間に辺がある。
- 上記以外の頂点、辺はない。

たとえば、頂点 $\langle 2, 3 \rangle$ と頂点 $\langle 5, 3 \rangle$ の間には辺があり、頂点 $\langle 2, 3 \rangle$ と頂点 $\langle 3, 5 \rangle$ の間には辺がない。(無向グラフであることに注意せよ。)

この時、以下の問に答えよ。

- 頂点 $\langle 4, 12 \rangle$ と頂点 $\langle 34, 21 \rangle$ の次数をそれぞれ求めよ。
- 頂点 $\langle 8, 12 \rangle$ から頂点 $\langle 38, 42 \rangle$ への道はあるか、同様に頂点 $\langle 8, 12 \rangle$ から頂点 $\langle 28, 48 \rangle$ への道はあるか。道がある場合は、その長さも答えよ。
- グラフ G の頂点の次数の最大値を求めよ。
- グラフ G に閉路 (サイクル) は何個あるか求めよ。
- グラフ G の連結成分の中で頂点 $\langle 13, 13 \rangle$ を含むものに対して、位数 (頂点の個数) とサイズ (辺の本数) を求めよ。
- グラフ G の連結成分の個数を求めよ。
- グラフ G のサイズ (辺の本数) を求めよ。
- グラフ G は何を表したもののか、説明しなさい。

問題 2 (グラフの次数)

無向グラフ G は頂点を 6 個持ち、その各頂点の次数が $3, 3, 3, 2, 2, n$ であるとする。ただし、 n は自然数である。

- $n = 1$ のときのグラフ G の例を 1 つ描きなさい。
- $n = 1, 3, 5$ であることを示しなさい。

問題 3 (木に関する証明)

無向グラフ G が連結であり、 G のどの辺を取り除いても、連結でなくなるとする。この時 G は木であることを示しなさい。(ヒント: 木の定義の 2 番目である「連結で閉路がない」を使うとよい。)