

『離散構造』 5章 (グラフ) の演習問題の解答

亀山

問題 1 (グラフ)

無向グラフ G を以下のように定める。

- G の頂点は、 $\langle x, y \rangle$ という名前を持ち、 $0 < x < 50$ かつ $0 < y < 50$ である。([補足] ここで、「 x, y が整数である」という制約を書き忘れていた。実際に解いてくれた人もそのつもりでやってくれたが、当然ながら、 x, y が実数なら答えが違ってくることもあるので、これは、問題文のミスである。指摘してくれた人に感謝。)
- $\langle x, y \rangle$ と $\langle x + y, y \rangle$ が両方とも G の頂点であれば、それらの間に辺がある。
- $\langle x, y \rangle$ と $\langle x, x + y \rangle$ が両方とも G の頂点であれば、それらの間に辺がある。
- 上記以外の頂点、辺はない。

たとえば、頂点 $\langle 2, 3 \rangle$ と頂点 $\langle 5, 3 \rangle$ の間には辺があり、頂点 $\langle 2, 3 \rangle$ と頂点 $\langle 3, 5 \rangle$ の間には辺がない。(無向グラフであることに注意せよ。)

この時、以下の問に答えよ。

- (a) 頂点 $\langle 4, 12 \rangle$ と頂点 $\langle 34, 21 \rangle$ の次数をそれぞれ求めよ。

答. 頂点 $\langle 4, 12 \rangle$ からの辺は、頂点 $\langle 16, 21 \rangle$, 頂点 $\langle 4, 16 \rangle$, 頂点 $\langle 4, 8 \rangle$ への辺なので、次数は 3 である。

頂点 $\langle 34, 21 \rangle$ からの辺は、頂点 $\langle 13, 21 \rangle$ への辺なので、次数は 1 である。

- (b) 頂点 $\langle 8, 12 \rangle$ から頂点 $\langle 38, 42 \rangle$ への道はあるか、同様に頂点 $\langle 8, 12 \rangle$ から頂点 $\langle 28, 48 \rangle$ への道はあるか。道がある場合は、その長さも答えよ。

答. 頂点 $\langle 8, 12 \rangle$ から道を通して到達可能な頂点を全部列挙するとわかるように、頂点 $\langle 38, 42 \rangle$ への道はない。

頂点 $\langle 8, 12 \rangle$ から $\langle 28, 48 \rangle$ への道 (の 1 つ) は、以下の長さ 3 の道である。

$$\langle 8, 12 \rangle \rightarrow \langle 8, 20 \rangle \rightarrow \langle 28, 20 \rangle \rightarrow \langle 28, 48 \rangle$$

- (c) グラフ G の頂点の次数の最大値を求めよ。

答. 頂点 $\langle x, y \rangle$ との間で辺を持つ可能性があるのは、 $\langle x + y, y \rangle$, $\langle x, x + y \rangle$, $\langle x - y, y \rangle$, $\langle x, y - x \rangle$ の 4 つであるが、 $\langle x - y, y \rangle$ と $\langle x, y - x \rangle$ はどちらか一方しか、 G の頂点ではない。よって、頂点の次数はたかだか 3 であるが、上問からわかるように、実際に次数 3 の頂点があるので、次数の最大値は 3 である。

- (d) グラフ G に閉路 (サイクル) は何個あるか求めよ。

答. 閉路はない。理由: 閉路があったとして、その閉路に含まれる頂点 $\langle x, y \rangle$ のうち、 $x + y$ の最大のもの (の 1 つ) を $\langle x_0, y_0 \rangle$ とする。

閉路であるので、 $\langle x_0, y_0 \rangle$ から異なる 2 点への辺がある。それら 2 点を $\langle x_1, y_1 \rangle$ と $\langle x_2, y_2 \rangle$ とする。 x_0, y_0 の取り方から、 $x_0 + y_0 \geq x_i + y_i$ ($i = 1, 2$) である。

グラフ G の辺の定義から、 $x_0 > y_0$ のとき、 $x_i = x_0 - y_0$, $y_i = y_0$ ($i = 1, 2$) と一意的に決まってしまうので、 $\langle x_1, y_1 \rangle$ と $\langle x_2, y_2 \rangle$ は同一の点であり、矛盾する。同様に $x_0 < y_0$ および、 $x_0 = y_0$ のときも矛盾する。

以上から、 G に閉路はない。

- (e) グラフ G の連結成分の中で頂点 $\langle 13, 13 \rangle$ を含むものに対して、位数 (頂点の個数) とサイズ (辺の本数) を求めよ。

答. この連結成分の頂点は、 $\langle 13, 13 \rangle$, $\langle 13, 26 \rangle$, $\langle 13, 39 \rangle$, $\langle 26, 13 \rangle$, $\langle 39, 13 \rangle$, $\langle 39, 26 \rangle$, $\langle 26, 39 \rangle$ の 7 個である。また、 G に閉路はないのでこの連結成分にも閉路はなく、よって、辺は 6 本である。

- (f) グラフ G の連結成分の個数を求めよ。

答. 各連結成分で $x + y$ の値が最小の点 $\langle x, y \rangle$ において、 $x = y$ が成立する。よって、 x の取り得る値の数だけ連結成分が存在し、その数は 49 である。

- (g) グラフ G のサイズ (辺の本数) を求めよ。

$x_1 \neq y_1$ のとき、頂点 $\langle x_1, y_1 \rangle$ から、 $x_1 + y_1 > x_2 + y_2$ を満たす頂点 $\langle x_2, y_2 \rangle$ への辺は、1 本だけ存在する。

$x_1 = y_1$ のときは、そのような辺は存在しない。

よって、 G の頂点の集合を V とするとき、集合 $\{\langle x, y \rangle \in V \mid x \neq y\}$ の要素数が G のサイズとなり、 $49 \times 48 = 2352$ である。

- (h) グラフ G は何を表したもののか、説明しなさい。

答. $0 < x, y < 50$ となる $\langle x, y \rangle$ が与えられたとき、その最大公約数を計算する手順を図示したものである。 $\langle x, y \rangle$ から $\langle z, z \rangle$ への道があるとき、 x, y の最大公約数は z である。(参考: Euclid の互除法)

問題 2 (グラフの次数)

無向グラフ G は頂点を 6 個持ち、その各頂点の次数が $3, 3, 3, 2, 2, n$ であるとする。ただし、 n は自然数である。

- (a) $n = 1$ のときのグラフ G の例を 1 つ描きなさい。

答. 省略。(なお、今回の講義では、無向グラフ G の 2 つの頂点 x, y の間に 2 本以上の辺があることは許していなかったのですが、その範囲でグラフを描いてほしいというのが問題の意図である。2 つの頂点の間に 2 本以上の辺があることを許したグラフを多重グラフと呼び、多重グラフが必要となる応用も多い。例: 2 つの都市の間をつなぐ鉄道が 2 本以上ある場合。)

- (b) $n = 1, 3, 5$ であることを示しなさい。

答. まず、 $0 \leq n \leq 5$ は明らか。

次に、 n は奇数である。理由: グラフの各頂点の次数の和は、辺の総数の 2 倍であるので偶数である。グラフ G の場合、 $13 + n$ がそれにあたり、これが偶数なので、 n は奇数である。よって、 $n = 1, 3, 5$ である。

なお、このグラフの場合、 $n = 1, 3, 5$ の全てのケースに対して、グラフ G が存在する。

問題 3 (木に関する証明)

無向グラフ G が連結であり、 G のどの辺を取り除いても、連結でなくなるとする。この時 G は木であることを示しなさい。(ヒント: 木の定義の 2 番目である「連結で閉路がない」を使うとよい。)

答. G が問題の条件を満たすとする。また、閉路があると仮定する。(これで矛盾を導こうとしている。) この閉路を、 $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0$ とする。ただし、この閉路には x_0 以外の頂点は 2 回以上あらわれないとしてよい (2 回あらわれる頂点があったら、そこを short cut した閉路を作ることができるので)。

グラフ G から頂点 x_0 と頂点 x_1 の間の辺を取り除いたグラフを G' とする。ここで、 G' は連結であることを言いたい (そうすると、問題の条件に矛盾するので証明終了である。)

グラフ G' の任意の 2 頂点 y_0, y_1 を取る。 G と G' の頂点集合は同じなので、 y_0, y_1 はグラフ G の頂点でもある。 G は連結なので、 G において y_0 と y_1 の間に道がある。その道が x_0 と x_1 の間の辺を使っていなければ、そのまま G' でも道になる。一方、その道が x_0 と x_1 の間の辺を使っていれば、そのままでは G' の道にならない。しかし、最初に存在を仮定した閉路を利用して、 $y_0, \dots, x_0, x_1, \dots, y_1$ という道を、 $y_0, \dots, x_0, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1, \dots, y_1$ という道に作りかえることができ、これは G' の道になる。
($x_0, x_1, \dots, x_n, x_0$ という閉路は同じ頂点を 2 回通らないので、 $x_0, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1$ という道は、 x_0 と x_1 をつなぐ辺を含まない。従って、 G' における道になっている。)

よって、いずれにしても、 G' において y_0 と y_1 の間に道があり、 G' は連結である。これは問題の条件 (G から辺を取りのぞいたら、連結でなくなる) に矛盾するので、最初の仮定である「 G に閉路がある」が否定される。(証明終わり。)