『離散構造』 Short Quiz
2010.1.22 (亀山)

この用紙に short quiz の解答を書いて提出しなさい。

学籍番号:
氏名:

Short Quiz 1. 集合 $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ 上の二項関係のうち、全順序になっているものを 1 つ示しなさい。(やや難問かもしれません。難しければ、「順序になっているもののうち、なるべく全順序に近いものを 1 つ示しなさい」という問題にしても構いません。)

Answer. この問題は難しかったと思う。

まず、「集合 $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ 上の二項関係」とは何か、を考える必要がある。直積集合 $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ の要素は、$\langle n, m \rangle$ の形をしており $(n, m \in \mathcal{N})$、それらの間の関係ということは、$\langle n, m \rangle R \langle n', m' \rangle$ の形の二項関係 R ということである。

たとえば、$(\langle n, m \rangle R_1 \langle n', m' \rangle) \Leftrightarrow (n \leq n' \wedge m \leq m')$ と定義すると、R_1 は確かに二項関係になるし、さらに、順序にもなる。しかし、これは、全順序ではない。たとえば、$\langle 3, 5 \rangle$ と $\langle 5, 3 \rangle$ という 2 つの要素を考えると、$\langle 3, 5 \rangle R_1 \langle 5, 3 \rangle$ も $\langle 5, 3 \rangle R_1 \langle 3, 5 \rangle$ も不成立である。

それでは、$(\langle n, m \rangle R_2 \langle n', m' \rangle) \Leftrightarrow (n \leq n' \vee m \leq m')$ と定義すると、R_2 は二項関係だが、順序にならない。なぜなら、$\langle 3, 5 \rangle R_2 \langle 5, 3 \rangle$ も $\langle 5, 3 \rangle R_2 \langle 3, 5 \rangle$ も両方とも成立してしまうから、反対称律が成立しないのである。

では、$(\langle n, m \rangle R_3 \langle n', m' \rangle) \Leftrightarrow (n + m \leq n' + m')$ と定義すると、これも順序にならない。($\langle 3, 5 \rangle R_3 \langle 5, 3 \rangle$ も $\langle 5, 3 \rangle R_3 \langle 3, 5 \rangle$ も成立)

結局、辞書式順序や、その仲間にするしかない。たとえば、$(\langle n, m \rangle R_4 \langle n', m' \rangle) \Leftrightarrow ((n + m < n' + m') \vee (n + m = n' + m' \wedge n \leq n'))$ と定義すると、(辞書式順序とは違うが) これは全順序である。この場合、(1) まず、対の 2 つの数の和の大小で比較し、(2) それで決着がつかなければ (対の 2 つの数の和が等しければ)、1 番目の数が小さい方が小さい、としている。

同様に、$(\langle n, m \rangle R_5 \langle n', m' \rangle) \Leftrightarrow ((n * m < n' * m') \vee (n * m = n' * m' \wedge n \leq n'))$ や、$(\langle n, m \rangle R_6 \langle n', m' \rangle) \Leftrightarrow ((n + m < n' + m') \vee (n + m = n' + m' \wedge m' \leq m))$ と定義される二項関係 R_5, R_6 も全順序である。