『離散構造』 4章(関係)の演習問題
2010.1.22, 亀山

問題 1 (2項関係) W を英単語の集合(ここでは簡単のため、英小文字(26文字)からなる1文字以上の文字列を英単語とよぶ)とし、W 上の2項関係として以下のものを考える。

$$(aR_1b) \Leftrightarrow a \text{ に含まれる母音の数は } b \text{ と同じである}$$
$$(aR_2b) \Leftrightarrow a \text{ は } b \text{ を(文字列として)含んでいる}$$

(a) R_i $(i = 1, 2)$ の中で、反射律を満たすものはどれか。(その理由も述べよ。以下同様。)

(b) R_i $(i = 1, 2)$ の中で、推移律を満たすものはどれか。

(c) R_i $(i = 1, 2)$ の中で、対称律を満たすものはどれか。

(d) R_i $(i = 1, 2)$ の中で、反対称律を満たすものはどれか。

問題 2 (順序)

$\mathcal{N}_2 = \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ と略記することにする。$\mathcal{N}_2$ 上の二項関係 R を以下のように定義する。

$$\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle \Leftrightarrow ((x_1 + y_1 < x_2 + y_2) \vee ((x_1 + y_1 = x_2 + y_2) \wedge (y_1 \leq y_2)))$$

(a) R が $\mathcal{N}_2$ 上の順序であることを示しなさい。

(b) R が $\mathcal{N}_2$ 上の順序であることを既知として、全順序であることを示しなさい。

(c) $\mathcal{N}_2$ において、R に関する最小元と最大元は存在するか、また、存在する場合は、具体的に何か?(ただし、 $\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle$ となるとき、$\langle x_1, y_1 \rangle$ の方を「小さい」と見なすことにする。)

(d) (発展問題) $\mathcal{N}_2$ のすべての要素を、R に関して小さい順に並べたとする。このとき、$f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}_2$ という関数 f を、$f(n) =$「上記の列における n 番目の要素」と定義すると、f は全単射になることを示しなさい。(ただし、列における最初の要素を「0番目の要素」と呼ぶことにする。)

問題 3 (関係の合成)

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{a, b, c\}$ とする。A, B 上の二項関係 R と B, A 上の二項関係 S が以下のように定義されている。

xRy	x	y
	1	a
	1	b
	2	a
	2	b
	2	c

ySx	y	x
	a	1
	a	3
	b	2
	b	3
	c	3

(a) 合成関係 $R \circ S$ を計算せよ。

(b) 合成関係 $S \circ R$ を計算せよ。

(c) A, B, A 上の3項関係 T を、$\langle a, b, c \rangle \in T \Leftrightarrow ((aRb) \wedge (bSc))$ と定義する。T を具体的に計算せよ。(2010/01/22, 21:50頃修正, 当初は T のことを A, B, C 上の3項関係と書いていましたが、正しくは、A, B, A 上の3項関係です。)

(d) 「ある $b \in B$ に対して $\langle a, b, c \rangle \in T$」ということと、$a(R \circ S)c$ となることは同値である。このことを説明せよ。