

『離散構造』 4章(関係)の演習問題の解答例

亀山

問題 1 (2項関係) W を英単語の集合 (ここでは簡単のため、英小文字 (26 文字) からなる 1 文字以上の文字列を英単語とよぶ) とし、 W 上の 2 項関係として以下のものを考える。

$$(aR_1b) \Leftrightarrow a \text{ に含まれる母音の数は } b \text{ と同じである}$$

$$(aR_2b) \Leftrightarrow a \text{ は } b \text{ を (文字列として) 含んでいる}$$

解答を書きやすくするため、英単語 a に対して、 $v(a)$ を「 a に含まれる母音の数」と定義する。また、英単語 a, b に対して、 $a \sqsubset b$ を「 a が b を文字列として含んでいること」と定義する。

(a) R_i ($i = 1, 2$) の中で、反射律を満たすものはどれか。(その理由も述べよ。以下同様。)

答. R_1 は反射律を満たす。なぜなら、どんな英単語 a に対しても、 $v(a) = v(a)$ だから (よって aR_1a が成立するから)。

答. R_2 は反射律を満たす。なぜなら、どんな英単語 a に対しても、 $a \sqsubset a$ だから。

(b) R_i ($i = 1, 2$) の中で、推移律を満たすものはどれか。

答. R_1 は推移律を満たす。なぜなら、どんな英単語 a, b, c に対しても、 $v(a) = v(b)$ と $v(b) = v(c)$ が成立すれば、 $v(a) = v(c)$ が成立するから。(よって、 $((aR_1b) \wedge (bR_1c)) \Rightarrow (aR_1c)$ が成立するから)。

答. R_2 は推移律を満たす。なぜなら、どんな英単語 a, b, c に対しても、 $a \sqsubset b$ と $b \sqsubset c$ が成立すれば、 $a \sqsubset c$ が成立するから。

(c) R_i ($i = 1, 2$) の中で、対称律を満たすものはどれか。

答. R_1 は対称律を満たす。なぜなら、どんな英単語 a, b に対しても、 $v(a) = v(b)$ であれば、 $v(b) = v(a)$ であるから。(よって、 $(aR_1b) \Rightarrow (bR_1a)$ が成立するから)。

答. R_2 は対称律を満たさない。このことを言うためには、反例を 1 セットあげればよい。たとえば、 $xyz \sqsubset x$ であるが、 $x \sqsubset xyz$ ではないので、 $\forall a \in W. \forall b \in W. ((aR_2b) \Rightarrow (bR_2a))$ が成立しない。

(d) R_i ($i = 1, 2$) の中で、反対称律を満たすものはどれか。

答. R_1 は反対称律を満たさない。このことを言うためには、反例を 1 セットあげればよい。 $v(\text{computer}) = v(\text{internet})$ であり、当然ながら、 $v(\text{internet}) = v(\text{computer})$ でもあるが、 $\text{internet} = \text{computer}$ ではない。(2 つは、英単語として異なるものである。) よって、 $\forall a \in W. \forall b \in W. (((aR_1b) \wedge (bR_1a)) \Rightarrow a = b)$ が成立しない。

答. R_2 は反対称律を満たす。なぜなら、 $a \sqsubset b$ かつ $b \sqsubset a$ が成立すれば、互いに他方を含むということで、 a と b は文字列として等しい (全く同じ英単語) ということになるから。

以上から、 R_1 は同値関係であり、 R_2 は順序であることがわかる。また、 xyz と zyx の間に R_2 関係は成立しないので、 R_2 は全順序ではない。

問題 2 (順序)

$\mathcal{N}_2 = \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ と略記することにする。 $\mathcal{N}_2$ 上の二項関係 R を以下のように定義する。

$$\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle \Leftrightarrow ((x_1 + y_1 < x_2 + y_2) \vee ((x_1 + y_1 = x_2 + y_2) \wedge (y_1 \leq y_2)))$$

[補足: これは辞書式順序に似ているように見えるかもしれないが、それとは本質的に異なるものである。]

(a) R が $\mathcal{N}_2$ 上の順序であることを示しなさい。

反射律: $\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_1, y_1 \rangle$ が任意の x_1, y_1 に対して成立するかどうかを調べる。これは定義より、 $(x_1 + y_1 < x_1 + y_1) \vee ((x_1 + y_1 = x_1 + y_1) \wedge (y_1 \leq y_1))$ が成立するかどうかと一致するが、後半の $(x_1 + y_1 = x_1 + y_1) \wedge (y_1 \leq y_1)$ は明らかに任意の x_1, y_1 に対して成立するので、全体として成立する。

推移律: $\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle$ と $\langle x_2, y_2 \rangle R \langle x_3, y_3 \rangle$ が両方とも成立するとき、 $\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_3, y_3 \rangle$ が (どんな $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ に対しても) 成立するかどうかを調べる。

このとき、 $x_1 + y_1 < x_2 + y_2$ または、 $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \wedge y_1 \leq y_2$ が成立する。同様に、 $x_2 + y_2 < x_3 + y_3$ または、 $x_2 + y_2 = x_3 + y_3 \wedge y_2 \leq y_3$ が成立する。そこで、これらを組み合わせた4つの場合に場合分けする。

(Case 1: $x_1 + y_1 < x_2 + y_2$ かつ $x_2 + y_2 < x_3 + y_3$ のとき) このとき、 $x_1 + y_1 < x_3 + y_3$ なので、 $\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_3, y_3 \rangle$ が成立する。

(Case 2: $x_1 + y_1 < x_2 + y_2$ かつ $x_2 + y_2 = x_3 + y_3 \wedge y_2 \leq y_3$ のとき) このとき、 $x_1 + y_1 < x_3 + y_3$ なので、 $\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_3, y_3 \rangle$ が成立する。

(Case 3: $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \wedge y_1 \leq y_2$ かつ $x_2 + y_2 < x_3 + y_3$ のとき) このとき、 $x_1 + y_1 < x_3 + y_3$ なので、 $\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_3, y_3 \rangle$ が成立する。

(Case 4: $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \wedge y_1 \leq y_2$ かつ $x_2 + y_2 = x_3 + y_3 \wedge y_2 \leq y_3$ のとき) このとき、 $x_1 + y_1 = x_3 + y_3$ かつ、 $y_1 \leq y_3$ が成立するので、 $\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_3, y_3 \rangle$ が成立する。

以上より、どの場合でも、 $\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_3, y_3 \rangle$ が成立するので、 R は推移律を満たす。

反対称律: $\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle$ と $\langle x_2, y_2 \rangle R \langle x_1, y_1 \rangle$ が両方とも成立すると仮定する。(ここでの目標は、 $\langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle$ すなわち、 $x_1 = x_2$ かつ $y_1 = y_2$ を示すことである。) 仮定から、 $(x_1 + y_1 < x_2 + y_2)$ または、 $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \wedge y_1 \leq y_2$ かつ $(x_2 + y_2 < x_1 + y_1)$ または、 $x_2 + y_2 = x_1 + y_1 \wedge y_2 \leq y_1$ が成立する。これらを組み合わせた4つの場合のうち、矛盾しないのは、 $(x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \wedge y_1 \leq y_2)$ かつ $x_2 + y_2 = x_1 + y_1 \wedge y_2 \leq y_1$ の場合だけである。このとき、 $y_1 = y_2$ となるので、さらに $x_1 = x_2$ となる。よって R は反対称律を満たす。

以上から、 R は順序である。

(b) R が $\mathcal{N}_2$ 上の順序であることを既知として、全順序であることを示しなさい。

どんな $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{N}$ に対しても、 $\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle$ か、あるいは、 $\langle x_2, y_2 \rangle R \langle x_1, y_1 \rangle$ の少なくとも一方が成立することを示す。

以下のように場合分けして考える。

(Case 1: $x_1 + y_1 < x_2 + y_2$ のとき) 定義から、 $\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle$ である。

(Case 2: $x_1 + y_1 > x_2 + y_2$ のとき) 定義から、 $\langle x_2, y_2 \rangle R \langle x_1, y_1 \rangle$ である。

(Case 3: $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ のとき) この場合は、さらに2つに場合分けする。

(Case 3-1: $y_1 \leq y_2$ のとき) 定義から、 $\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle$ である。

(Case 3-2: $y_1 > y_2$ のとき) 定義から、 $\langle x_2, y_2 \rangle R \langle x_1, y_1 \rangle$ である。

以上より、すべての場合で、 $\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle$ か、あるいは、 $\langle x_2, y_2 \rangle R \langle x_1, y_1 \rangle$ の少なくとも一方が成立することが示せた。よって R は全順序である。

(c) $\mathcal{N}_2$ において、 R に関する最小元と最大元は存在するか、また、存在する場合は、具体的に何か? (ただし、 $\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle$ となるとき、 $\langle x_1, y_1 \rangle$ の方を「小さい」と見なすことにする。)

答. 最小元は存在して $\langle 0, 0 \rangle$ である。(どんな $x_1, y_1 \in \mathcal{N}$ に対しても、 $\langle 0, 0 \rangle R \langle x_1, y_1 \rangle$ が成立するから。)

答. 最大元は存在しない。($\langle m, n \rangle$ が最大元とすると、 $\langle m, n+1 \rangle R \langle m, n \rangle$ が成立しないので矛盾する。)

(d) (発展問題: この問題に正確に答えるのはなかなか難しいので、興味がある人のみ読めばよい)

$\mathcal{N}_2$ のすべての要素を、 R に関して小さい順に並べたとする。このとき、 $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}_2$ という関数 f を、 $f(n) =$ 「上記の列における n 番目の要素」と定義すると、 f は全単射になることを示しなさい。(ただし、列における最初の要素を「0 番目の要素」と呼ぶことにする。)

答. $\mathcal{N}_2$ の要素を順番に並べて番号付けしたものであるから、単射であることは明らかである。

全射であることも明らかと思うかもしれないが、実際にはそれほど自明ではない。なぜなら、以下のような (上記とは異なる) 並べ方をしてしまうと、「全ての要素」がちゃんと並ばないからである。

$$\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \dots, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \dots,$$

このような並べ方は、 $\mathcal{N}_2$ の要素を辞書式順序で比較したときの並べ方である。この場合、途中の $\dots$ があらわしているように、 $\langle 1, 0 \rangle$ という要素の前に、無限に多くの要素がはいるので、番号付けをしようとおもっても、 $\langle 1, 0 \rangle$ まで順番がまわってこない。

一方、 R による番号付けは、それとは異なり、番号付けがうまくできる。その理由は、どんな $\langle x, y \rangle \in \mathcal{N}_2$ に対しても、それより (R に関して) 小さい要素は有限個しかないからである。従って、 R によって $\mathcal{N}_2$ の要素を順番に並べると、きちんと 0 番目、1 番目、 $\dots$ と並べることができる。すなわち f は全射となる。

[補足] R によって並んだ $\mathcal{N}_2$ の要素列を見てみると、 $\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 3, 0 \rangle, \dots$ となる。この様子を絵で描いてみると、何をやっているかよくわかるであろう。

問題 3 (関係の合成)

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{a, b, c\}$ とする。 A, B 上の二項関係 R と B, A 上の二項関係 S が以下のように定義されている。

xRy	x	y
	1	a
	1	b
	2	a
	2	b
	2	c

ySx	y	x
	a	1
	a	3
	b	2
	b	3
	c	3

(a) 合成関係 $R \circ S$ を計算せよ。

答. $x(R \circ S)z$ が成立するのは、 xRy かつ ySz が成立する $y \in B$ が存在するときである。そこで、 $x = 1, 2, 3$ に対して、 xRy となる y を探すと、 $x = 1$ に対しては $y = a, b$ であり、 $x = 2$ に対しては $y = a, b, c$ であり、 $x = 3$ に対してはそのような y はない。 $y = a, b, c$ に対して、 ySz となる z を探すと、 $y = a$ に対しては $z = 1, 3$ であり、 $y = b$ に対しては $z = 2, 3$ であり、 $y = c$ に対しては $z = 3$ である。これらをまとめると、

$x(R \circ S)z$ が成立するのは、 $\langle x, z \rangle = \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle$ である。

よって、 $R \circ S = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$ 。

(b) 合成関係 $S \circ R$ を計算せよ。

答. 上と同様に計算すると、 $S \circ R = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle\}$ となる。

(c) A, B, A 上の 3 項関係 T を、 $\langle a, b, c \rangle \in T \Leftrightarrow ((aRb) \wedge (bSc))$ と定義する。 T を具体的に計算せよ。

答. これも上と同様の計算であり、 $T = \{\langle 1, a, 1 \rangle, \langle 1, a, 3 \rangle, \langle 1, b, 2 \rangle, \langle 1, b, 3 \rangle, \langle 2, a, 1 \rangle, \langle 2, a, 3 \rangle, \langle 2, b, 2 \rangle, \langle 2, b, 3 \rangle, \langle 2, c, 3 \rangle\}$ となる。

(d) 「ある $b \in B$ に対して $\langle a, b, c \rangle \in T$ 」ということと、 $a(R \circ S)c$ となることは同値である。このことを説明せよ。

答. 「ある $b \in B$ に対して $\langle a, b, c \rangle \in T$ 」は、 T の定義により、「ある $b \in B$ に対して $(aRb) \wedge (bSc)$ 」と同値である。一方、 $a(R \circ S)c$ は、合成関係の定義より、「ある $b \in B$ に対して $(aRb) \wedge (bSc)$ 」と同値である。

よって、両者は同値である。