

『離散構造』3章(関数)の演習問題

2009.12.25、 亀山

問題1 (関数の定義と単射・全射)

$\mathcal{N}$ を自然数の集合 (すべての自然数からなる集合、0 も要素である)、 $\mathcal{R}$ を実数の集合 (すべての実数からなる集合) とする。

以下に示す対応付けは、 $\mathcal{R}$ から $\mathcal{R}$ への関数となるか、また、関数である場合、単射であるか、さらに、全射であるか答えなさい。

同様に、以下の対応付けが、 $\mathcal{N}$ から $\mathcal{N}$ への関数となるか、また、関数である場合、単射であるか、さらに、全射であるか答えなさい。

- (a) x に対して $x^3 - x$ を対応付ける。
- (b) [問題訂正 (2010/01/05)] y に対して $x^3 - x = y$ となる数 x を対応付ける。
- (c) x に対して x より大きくない (x と等しいか小さい) 最大の自然数を対応付ける。

問題2 (像、合成、全射、単射)

$f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}, g: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ となる関数 f, g を次のように定義する。

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$

また、 $A = \{x \in \mathcal{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$ とする。

- (a) f による A の像 $f(A)$ と、 g による A の像 $g(A)$ を求めよ。
- (b) 合成関数 $f \circ g$ と $g \circ f$ は定義されるか調べなさい。また、定義される場合、それらを具体的に求めよ。
- (c) 集合 B を $\mathcal{R}$ の部分集合とする。 $f: \mathcal{R} \rightarrow B$ が全射となる集合 B を1つ求めよ。
- (d) 集合 C を $\mathcal{R}$ の部分集合とする。 $f: C \rightarrow \mathcal{R}$ が単射となる C を1つ求めよ。
- (e) $f \circ h = g \circ h$ となる関数 $h: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ を1つ求めよ。

問題3 関数 f と g に対して、合成関数 $g \circ f$ が定義されたとする。このとき、「 f と g がともに全射であるならば $g \circ f$ が全射である」が成立するかどうか調べ、証明または反証しなさい。(成立するなら証明し、そうでなければ、反例を1つ挙げなさい。)

(以下は発展課題である。) 余力があれば、「単射」、「全単射」について、上記と同じことが成立するかどうか調べなさい。

問題4 (関数プログラミング)

関数 $f: (\mathcal{N} \times \mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{N}$ は、任意の自然数 x, y に対して次の性質を満たしているとする。

$$f(\langle 0, y \rangle) = y$$

$$f(\langle x+1, y \rangle) = f(\langle x, x * y + y \rangle)$$

$g(x) = f(\langle x, 1 \rangle)$ と定義するとき、 $g: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ となる関数であることを示しなさい。

また、任意の $x \in \mathcal{N}$ に対して $g(x+1) = g(x) * (x+1)$ が成立することを示しなさい。

さらに、 g はどのような意味を持つ関数が答えなさい。