

『離散構造』2章の演習問題

2009.12.18, 亀山

以下の演習問題は、次回の演習実施日までに解答を用意せよ。

問題 1 (集合の表現)

以下の集合を $\{x \in A \mid P(x)\}$ の形で記述せよ。(ただし, A は集合, $P(x)$ は命題である.)

- (a) 2010年サッカー・ワールドカップにおけるアジアからの出場国の集合。
- (b) $x = \sin x$ となる実数 x の集合。
- (c) 完全数の集合 (自然数 x が完全数であるとは、 x の約数の総和が $2x$ になること。たとえば、 $1+2+3+6=6 \cdot 2$ なので 6 は完全数である。)
- (d) 自然数の集合 \mathcal{N} の部分集合のうち偶数だけからなる集合をすべて集めてきた集合。(たとえば、 $\{2, 6, 12\}$ などはこの条件を満たすので、求める集合の要素となる。)

問題 2 (集合の演算)

以下の各項目における集合たちが、互いに等しいかどうか判定せよ。(等しい場合はその根拠を述べ、等しくない場合は具体的な反例をあげよ。なお、反例は無闇に大きな集合を考えず、要素数が 2-3 個程度の小さな集合の範囲で考えるとよい。)

- (a) 集合 $A - (A \cap B)$ と集合 $A - B$ 。
- (b) 集合 $(A \cap B) \cap C$ と集合 $A \cap (B \cap C)$ 。
- (c) 集合 $(A \cup B) \cap C$ と集合 $A \cup (B \cap C)$ 。
- (d) 集合 $(A \cup B) \times C$ と集合 $(A \times C) \cup (B \times C)$ 。

問題 3 (有限集合の要素数)

A が有限集合のとき、 $\#A$ は A の要素数をあらわす。(なお、 A の要素数を $|A|$ と書くこともある。)

このとき、 $\#((A \cup B) \times C)$ を、 $\#A$ 、 $\#B$ 、 $\#C$ 、 $\#(A \cap B)$ を使って表せ。

同様に、 $\#((A \cup B) \cap C)$ を、 $\#(A \cap C)$ 、 $\#(B \cap C)$ 、 $\#(A \cap (B \cap C))$ を使って表せ。

問題 4 (集合に関する推論)

任意の集合 A, B, C に対して以下の命題が成立するかどうか調べ、証明あるいは反証せよ。

$$(A \subset B) \Rightarrow (A \times C \subset B \times C)$$