

『離散構造』2章の演習問題 の解答

2009.12.25, 亀山

問題 1 (集合の表現)

以下の集合を $\{x \in A \mid P(x)\}$ の形で記述せよ。(ただし, A は集合, $P(x)$ は命題である.)

- (a) 2010 年サッカー・ワールドカップにおけるアジアからの出場国の集合。

A としては, たとえば, 「サッカーの国際連盟?に加盟している国・地域の集合」を取る.

「 x は 2010 年サッカー・ワールドカップの出場国」を $Q(x)$ とし, 「 x はアジアの国」を $R(x)$ とすれば, $P(x)$ を $Q(x) \wedge R(x)$ と取ればよい.

答の例. (上記の $A, Q(x), R(x)$ に対して) $\{x \in A \mid Q(x) \wedge R(x)\}$.

補足: いろいろな解答があり得る.

- (b) $x = \sin x$ となる実数 x の集合。

答の例. $\mathcal{R}$ を実数の集合とすると, $\{x \in \mathcal{R} \mid x = \sin x\}$.

- (c) 完全数の集合 (自然数 x が完全数であるとは, x の約数の総和が $2x$ になること. たとえば, $1+2+3+6=6*2$ なので 6 は完全数である.)

$\sum_{y \in B} y$ で「集合 B の要素の総和」を表すことにする.(このような式をどう記述するかは皆さんの自由であり, どのような記法を使うかを明記してくれれば, それで問題ない. この解答例では, 数学の一般的な記法に従うが, それを丸暗記することに大きな意味はない.)

また, 「自然数 x の正の約数の集合」を C_x と書くことにする. (C_x を更に細かいものから定義したいなら, $\{y \in \mathcal{N} \mid y|x\}$ と定義できる. ここで $y|x$ は「 y は x の約数」を意味する.)

答の例. $\mathcal{N}$ を実数の集合とすると, $\{x \in \mathcal{N} \mid (\sum_{y \in C_x} y) = 2x\}$.

- (d) 自然数の集合 $\mathcal{N}$ の部分集合のうち偶数だけからなる集合をすべて集めてきた集合。(たとえば, $\{2, 6, 12\}$ などはこの条件を満たすので, 求める集合の要素となる.)

考え方. 定義したい集合は, 自然数の部分集合たち (のうち, ある種の条件を満たすもの) が要素である. 従って, 定義したい集合を含むべき大きな集合 A としては, $2^{\mathcal{N}}$ を取るのがよい.

定義したい集合の要素に対する条件を考える. 要素 (の 1 つ) を S とすると「 S の要素は偶数だけである」が条件である. これは「 y は偶数である」ことを意味する基本命題を $\text{Even}(y)$ と書けば, $\forall y \in S. \text{Even}(y)$ と表現することができる.

答の例. $\{S \in 2^{\mathcal{N}} \mid \forall y \in S. \text{Even}(y)\}$.

補足. 当然ながら, 言葉 (日本語) で書いてもよい. たとえば, $\{S \in 2^{\mathcal{N}} \mid S \text{ の全ての要素は偶数である} \}$ でもよい.

補足 2. 演習の際にわかったように, 「 S は偶数だけからなる集合」という日本語には, 若干のあいまいさがある (らしい). つまり, 上記の (私の) 解答では, S が空集合であってもよいが, 「 S は偶数だけからなる集合」を満たす S は, 空集合であってはいけない, という解釈もあるようだ. その場合, 解答は, 少し違ってきて, 以下ようになる.

$$\{S \in 2^{\mathcal{N}} \mid S \neq \{\} \wedge (\forall y \in S. \text{Even}(y))\}$$

問題 2 (集合の演算)

以下の各項目における集合たちが, 互いに等しいかどうか判定せよ。

(注意. いわゆる「ベン図」を書いて, 等しいかどうかを考えるのはヒントとしては有効な方法ではあるが, 「証明」や「反証」にはならない.)

- (a) 集合 $A - (A \cap B)$ と集合 $A - B$.

答. 等しい。

このことを証明するためには、すべての x に対して、「 $x \in$ 左辺ならば $x \in$ 右辺」とその逆を言わないといけな。

(左辺 $\rightarrow$ 右辺) $x \in A - (A \cap B)$ と仮定する。すると、差集合の定義より、 $x \in A$ かつ $x \notin A \cap B$ である。したがって、 $x \in A \cap B$ ではない。共通部分の定義より、「 $x \in A$ かつ $x \in B$ 」ではない。しかし、 $x \in A$ であることは既にわかっているので、結局、 $x \in B$ でない。以上をまとめると $x \in A$ かつ $x \notin B$ となり、 $x \in A - B$ が言えた。

(右辺 $\rightarrow$ 左辺) $x \in A - B$ と仮定する。すると、差集合の定義より、 $x \in A$ かつ $x \notin B$ である。したがって、 $x \in A \cap B$ ではない。まとめると $x \in A$ かつ $x \notin A \cap B$ となり、 $x \in A - (A \cap B)$ が言えた。

- (b) 集合 $(A \cap B) \cap C$ と集合 $A \cap (B \cap C)$.

答. 等しい。

この証明も、前問とほとんど同じである。(今回は、似たような問題が3つも4つも含まれてしまった。)

(左辺 $\rightarrow$ 右辺) $x \in (A \cap B) \cap C$ と仮定する。すると、共通部分の定義より、 $x \in A \cap B$ かつ $x \in C$ である。もう一度共通部分の定義を使うと、 $x \in A$ かつ $x \in B$ である。これらの材料を使って、共通部分の定義より、 $x \in B \cap C$ が言え、さらに、 $x \in A \cap (B \cap C)$ が言える。

(右辺 $\rightarrow$ 左辺) 上記とほぼ同様なので省略。

- (c) 集合 $(A \cup B) \cap C$ と集合 $A \cup (B \cap C)$.

答. 等しくない。

等しくない場合の根拠は、反例を1つあげればよい。たとえば、 $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{2, 3\}$ とすれば、 $(A \cup B) \cap C = \{2, 3\}$ 、 $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3\}$ となり等しくないことがわかる。

- (d) 集合 $(A \cup B) \times C$ と集合 $(A \times C) \cup (B \times C)$.

答. 等しい。

(左辺 $\rightarrow$ 右辺) $x \in (A \cup B) \times C$ と仮定する。これは直積集合なので、 $x = \langle y, z \rangle$ の形であり、 $y \in A \cup B$ かつ $z \in C$ となる。さらに和集合の定義より、 $y \in A$ または $y \in B$ である。よって、 $\langle y, z \rangle \in A \times C$ または $\langle y, z \rangle \in B \times C$ が成立し、「 $x \in$ 左辺 ならば $x \in$ 右辺」がいえた。

(右辺 $\rightarrow$ 左辺) $x \in (A \times C) \cup (B \times C)$ と仮定する。和集合の定義より、 $x \in A \times C$ または $x \in B \times C$ である。

($x \in A \times C$ の場合) 直積集合の定義より、 $x = \langle y, z \rangle$ の形であり、 $y \in A$ かつ $z \in C$ である。よって、和集合の定義より $y \in A \cup B$ である。直積集合の定義より、 $\langle y, z \rangle \in (A \cup B) \times C$ が言える。

($x \in B \times C$ の場合) 上記とほぼ同様である。

問題3 (有限集合の要素数)

A が有限集合のとき、 $\#A$ は A の要素数をあらわす。(なお、 A の要素数を $|A|$ と書くこともある。)

このとき、 $\#((A \cup B) \times C)$ を、 $\#A$ 、 $\#B$ 、 $\#C$ 、 $\#(A \cap B)$ を使って表せ。

答. まず、 $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$ である。さらに、 $\#(X \times Y) = (\#X) \cdot (\#Y)$ である。(本問では、これらの式の根拠までは問わない。)

これらを使って、 $\#((A \cup B) \times C) = \#(A \cup B) \cdot \#C = (\#A + \#B - \#(A \cap B)) \cdot \#C$ と計算できる。

同様に、 $\#((A \cup B) \cap C)$ を、 $\#(A \cap C)$ 、 $\#(B \cap C)$ 、 $\#(A \cap (B \cap C))$ を使って表せ。

答. まず、 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ である。(この事自体、証明を要するがここではそこまでは問わない。) 等しい集合の要素数は等しいので、 $\#((A \cup B) \cap C) = \#((A \cap C) \cup (B \cap C))$ である。

前問でも使った $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$ という公式を使うと、 $\#((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \#(A \cap C) + \#(B \cap C) - \#((A \cap C) \cap (B \cap C))$ となる。

さらに、 $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap (B \cap C)$ であるので、最終的に、 $\#((A \cup B) \cap C) = \#(A \cap C) + \#(B \cap C) - \#(A \cap (B \cap C))$ である。

問題 4 (集合に関する推論)

任意の集合 A, B, C に対して以下の命題が成立するかどうか調べ、証明あるいは反証せよ。

$$(A \subset B) \Rightarrow (A \times C \subset B \times C)$$

答. これは成立するので、証明する。そのためには、 $A \subset B$ と仮定して、 $A \times C \subset B \times C$ を言えばよい。さらに、 $A \times C \subset B \times C$ を言うためには、任意の x に対して、 $x \in A \times C$ ならば $x \in B \times C$ を言えばよい。

そこで、まず、 $A \subset B$ と仮定する。また、 $x \in A \times C$ と仮定する。直積集合の定義を使って、 $x = \langle y, z \rangle$ の形をしていて、 $y \in A$ かつ $z \in C$ であると言える。ところで、 $A \subset B$ なので、 $y \in B$ である。よって、 $y \in B$ かつ $z \in C$ なので、 $x = \langle y, z \rangle \in B \times C$ である。以上より、任意の x に対して、 $x \in A \times C$ ならば $x \in B \times C$ が言え、 $A \times C \subset B \times C$ が言えた。

$A \subset B$ と仮定して、 $A \times C \subset B \times C$ が言えたので、証明おわりである。