

『離散構造』 1 章
2009.12.4 (亀山)

Short Quiz 1 の解答は、本日の授業終了時点までに解き提出しなさい。

学籍番号: _____

氏名: _____

Short Quiz 1. $\wedge$ と $\vee$ という 2 種類の論理記号を、合計で N 個含む命題 (論理式) が与えられたとする。その命題の部分論理式のうち、相異なるものは最大いくつあるか？

ただし、 A の部分論理式のなかに、 A 自身も含めて考える。(従って、どんな論理式も 1 つ以上、部分論理式をもつ。)

たとえば、 $A \wedge (B \vee C)$ の部分論理式は、 $A \wedge (B \vee C)$, $B \vee C$, A , B , C の 5 つである。

(解答概要) 論理記号が N 個ある論理式において、それに含まれる全ての基本命題が異なるとき、相異なる部分論理式の数が最大になる、ということはすぐにわかる。従って、以下では、論理式に含まれる基本命題が相異なる、と仮定する。

この時、部分論理式の総数は $2N + 1$ である。この事実の、きちんとした証明は、第 6 章の「帰納法」の話をやるときに考えここでは、例を通じて直感的に理解する。

例として、 $A \wedge (B \vee C)$ を考える。その部分論理式の 1 つである $A \wedge (B \vee C)$ の「頂点」は、 $\wedge$ の記号である。ちょっとわかりにくいかもしれないが、論理式を「木」の形でかいたとき、一番上のノードに書いてある記号のことである。また、 $B \vee C$ という部分論理式の「頂点」は、 $\vee$ の記号であり、 A という部分論理式の「頂点」は、 A である。

このように、全ての部分論理式は、その「頂点」が、どこかのノードに対応する。「頂点」ごとに異なる部分論理式がさだまるので、結局のところ、「頂点」の個数を数えればよい。

論理記号が N 個ある 2 分木のノードの数は、 $2N + 1$ 個なので、異なる部分論理式は最大 $2N + 1$ 個ある。

(本問の正確な理解には、「グラフ」と「帰納」が必要であるので、この段階ではあまり気にしなくてもよい。)