

『離散構造』1章の演習問題の解答

2009.12.11 (亀山)

問 1

- (a) 試験に欠席するか、試験で悪い成績を取れば、単位を取れない。(基本命題; 「 P : 単位を取る」、「 Q : 試験に出席する」、「 R : 試験で良い成績を取る」)

順番に考えていけばよい。

- 「試験に欠席する」=「試験に出席しない」= $\neg Q$.
- 「試験で悪い成績を取る」=「試験で良い成績を取らない」= $\neg R$.
- 「試験に欠席するか、試験で悪い成績を取る」= $(\neg Q) \vee (\neg R)$.
- 「単位を取れない」= $\neg P$.
- 問題文全体= $((\neg Q) \vee (\neg R)) \Rightarrow (\neg P)$.

- (b) 単位を取れないなら、試験に欠席するか試験で悪い成績を取ったからである。(基本命題; 同上)

前問と同様に順番に考えると、 $(\neg P) \Rightarrow ((\neg Q) \vee (\neg R))$ となる。

[補足] 上記の解答でよいと思うが、あとでよく読むと、この問題文は(自然言語の文にありがちな)あいまいさを持っていたようだ。つまり、「単位を取れないならば、試験に欠席するか試験で悪い成績を取った」という(意図通りの)読み方ではなく、「単位を取れないのは、試験に欠席するか試験で悪い成績を取ったからである。」という読み方もあり得る。両者は似ているが、論理的な意味合いは異なる。つまり、第1の読みかたは「前半が理由、後半が結果」であり、第2の読みかたは「前半が結果、後半が理由」となる。後者の場合、正解は以下の通りである。(前問の解答と同じ。)

$$((\neg Q) \vee (\neg R)) \Rightarrow (\neg P)$$

これは問題文の日本語が曖昧だったせいであり、本問ではどちらも正解とする。(もちろん、期末試験等ではこのように、意味がはっきりしない文章は出題しない。)

- (c) 学生が一生懸命勉強をして、教員または TA が一生懸命授業をすれば、単位を取れる。(基本命題; 「 P : 学生が一生懸命勉強する」、「 Q : 教員が一生懸命授業する」、「 R : TA が一生懸命授業する」、「 S : 単位を取れる」)

以下の通りである。

$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow S$$

なお、括弧を省略して、 $(P \wedge Q \vee R) \Rightarrow S$ や $P \wedge Q \vee R \Rightarrow S$ と書くと、違う意味の論理式になるので注意せよ。

- (d) 「Excel2007 をインストールすれば Excel ファイルを pdf に変換できる。Excel2003 と Acrobat をインストールすれば Excel ファイルを pdf に変換できる。Excel2003 をインストール済みである。Excel ファイルを pdf に変換できない。」という事実から、「Acrobat をインストールしていない」という結論が導けるかどうか答えなさい。

まず、基本命題を以下のように取ろう。「 P : Excel2007 をインストールする」、「 Q : Excel2003 をインストールする」、「 R : Acrobat をインストールする」、「 S : Excel ファイルを pdf に変換できる」。

このとき、問題文の最初に書いてある文は、以下のように表現できる。

- (a) $P \Rightarrow S$: Excel2007 をインストールすれば Excel ファイルを pdf に変換できる。
 (b) $(Q \wedge R) \Rightarrow S$: Excel2003 と Acrobat をインストールすれば Excel ファイルを pdf に変換できる。
 (c) Q : Excel2003 をインストール済みである。
 (d) $\neg S$: Excel ファイルを pdf に変換できない。
 (e) $\neg R$: Acrobat をインストールしていない。

結局、「上記の論理式 (a) ~ (d) がすべて真であるならば、いつでも 論理式 (e) が真であるかどうか」という問題に帰着される。これは、「 $((a) \wedge (b) \wedge (c) \wedge (d)) \Rightarrow (e)$ が恒真か」という問題と同じである。

あとは、真理値表を書いて恒真性を調べればよい。

P	Q	R	S	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	$((a) \wedge (b) \wedge (c) \wedge (d)) \Rightarrow (e)$
T	T	T	T	T	T	T	F	F	T
T	T	T	F	F	F	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T	T	F	T	T
T	T	F	F	F	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	F	F	F	T
T	F	T	F	F	T	F	T	F	T
T	F	F	T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	F	T	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T	T	F	T
F	T	F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	F	F	F	T
F	F	T	F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	T	T	T	F	F	T	T
F	F	F	F	T	T	F	T	T	T

恒真式になったので、「Acrobat をインストールしていない」という事が結論付けられた。

- (e) 「Excel2003 と Excel2007 は共存できない (両方ともインストールすることはできない)。」という事実がわかったときはどうか。

この論理式は、 $\neg(P \wedge Q)$ と表現できる。(あるいは、 $(\neg P) \vee (\neg Q)$ と表現してもよい。)

そうすると、「上記の論理式 (a) ~ (d) に加えて、 $\neg(P \wedge Q)$ がすべて真であるならば、いつでも 論理式 (e) が真であるかどうか」という問題になる。

これを解くためには、もう 1 度真理値表を書いてもよいが、前問での前提に条件が 1 つ追加されただけであるので、前問が恒真であれば、本問も恒真である。従って、わざわざ真理値表を書かなくてもよい。

問 2

- (a) $(A \wedge B) \vee C$ と $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ 。

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	F
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	F	F	F	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	T	T

よって同値ではない。

(b) $\neg(A \wedge B)$ と $(\neg A) \vee (\neg B)$ 。

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

よって同値である。

問 3 新しい論理記号として $\otimes$ を導入し、その真偽値を以下のように定める。

- $\otimes(a, b, c)$ は、 a, b, c がすべて偽か、すべて真のとき真となり、それ以外のとき、偽となる

このとき、以下の問に答えよ。

(a) $\otimes(a, F, F)$ が $\neg a$ と同値であることを示せ。

$a = T$ のとき、両者は F となり、 $a = F$ のとき、両者は T となるので、同値である。

(b) $\otimes(a, b, T)$ はどういう論理式と同値か?

$a \wedge b$ と同値である。なぜなら、 $\otimes(a, b, T)$ が T となるのは、 $a = b = T$ のときであり、その時に限られるから。

(c) $a \vee b$ と同値である論理式を、 $\otimes$ と T と F (と a と b) だけで作れ。

解答例 1: $a \vee b$ が $\neg((\neg a) \wedge (\neg b))$ と同値であることから、前 2 問の結果を利用して、

$$\begin{aligned}
 a \vee b &\Leftrightarrow \neg((\neg a) \wedge (\neg b)) \\
 &\Leftrightarrow \neg(\otimes(a, F, F) \wedge \otimes(b, F, F)) \\
 &\Leftrightarrow \neg(\otimes(\otimes(a, F, F), \otimes(b, F, F), T)) \\
 &\Leftrightarrow \otimes(\otimes(\otimes(a, F, F), \otimes(b, F, F), T), F, F)
 \end{aligned}$$

となり、 $\otimes(\otimes(\otimes(a, F, F), \otimes(b, F, F), T), F, F)$ という表現が得られた。これはもちろん「最小の表現」とは限らない。

解答例 2: 上記のものは $\otimes$ を 4 個使っていた。そこで 3 個以下で $a \vee b$ と同値になる式を探す。この範囲の論理式は有限個しかないので試行錯誤でも解ける。実際やってみると、たとえば、 $\otimes(\otimes(a, b, F), F, F)$ が $a \vee b$ と同値だとわかる。(正式には、真理値表を書いて同値であることを示す必要があるが、ここでは省略。)

(d) $a \Rightarrow b$ と同値である論理式を、 $\otimes$ と T と F (と a と b) だけで作れ。

解答例 1: この問題も、 $a \Rightarrow b$ が $(\neg a) \vee b$ と同値であることを利用して解ける。(TA の小鍛冶君が用意してくれた解答)

$$\begin{aligned}
 a \Rightarrow b &\Leftrightarrow (\neg a) \vee b \\
 &\Leftrightarrow \neg((\neg\neg a) \wedge (\neg b)) \\
 &\Leftrightarrow \neg(a \wedge (\neg b)) \\
 &\Leftrightarrow \neg(a \wedge \otimes(b, F, F)) \\
 &\Leftrightarrow \neg(\otimes(a, \otimes(b, F, F), T)) \\
 &\Leftrightarrow \otimes(\otimes(a, \otimes(b, F, F), T), F, F)
 \end{aligned}$$

解答例 2: 上記のものは $\otimes$ を 3 個使っていた。そこで 2 個以下で $a \Rightarrow b$ と同値になる式を探すと、 $\otimes(a, a, \otimes(a, b, T))$ というのがあるそうである。(なんと、小鍛冶君が、2 個以下の全ての式をチェックしてくれた!)

3 個でよければ、他にもいくつか解答がある。たとえば、 $\otimes(\otimes(\otimes(a, F, F), b, F), F, F)$ というのが、演習で解答してくれた人のものである。また、「最小の解答」は、青木智充君がしていたそうである。すばらしい!! 余力のある人は、この種の「論理式探し」をどうやって自動化 (コンピュータで解く) したらよいか是非考えてほしい。