『離散構造』 １章の例題 の解答
最終更新 2009.12.04

問 1-1 (命題論理による表現)
例題にならって、次の文を論理式で表現せよ。ただし、各問題ごとに指定された基本命題を使うこと。

(a) 「雨が降っていたら，A 君は傘を持っていく。」

基本命題として，P=「雨が降っている」, Q=「A 君は傘を持っていく」とすれば、「$P \Rightarrow Q$」という命題で表現することができる。

(b) 「A 君は怒られなければ勉強しない.」と「A 君が勉強したら怒られた.」(基本命題: P=「A 君が怒られる」、Q=「A 君が勉強する」)

前者は、「$(\neg A) \Rightarrow (\neg Q)$」である。後者は、「$Q \Rightarrow P$」である。

[補足] この 2 つの論理式に対する真理値表を書けばわかるように、2 つの論理式は同値である。これは、言語を研究する人にとっては有名な問題であり、「A 君は怒られなければ勉強しない.」という場合に、「A 君が勉強したら怒られた.」ということになってしまう、という不思議な現象である。

もちろん、よく考えてみれば、不思議なことはない。日本語の文は「時制」があり、時間的順序関係が含まれているのに対して、論理式に直したときに、時間の情報が失われてしまったのが問題である。実際には、「$Q \Rightarrow P$」という論理式の意味は、「A 君が勉強したら怒られた.」ではなく、「A 君が勉強しているとしたら、(それより前に) 怒られたからだ.」という意味になり、これならば、何も矛盾はない。

この種の話が好きな人は、自然言語処理 (文系の学問の意味ではなく、コンピュータを使った自然言語処理という意味である) の分野へ進むのが良いだろう。

(c) 「授業が面白いか，単位が欲しければ，授業に出席する.」(基本命題: P=「授業が面白い」、Q=「単位が欲しい」、R=「授業に出席する」)

これは、「$(P \vee Q) \Rightarrow R$」となる。

問 1-2 (述語論理による表現)
例題にならって、次の文を論理式で表現せよ。

(a) 「x は平方数である (ある整数の 2 乗になっている)。」

「y は整数である」という基本命題を「$\texttt{int}(y)$」と略記すると、上記の文は、$\texttt{int}(y) \wedge x = y^2$ という命題になりそうである。しかし，これでは x だけでなく，y にも依存する命題となってしまう．問題文は x のみについて書いてあるので，これでは良くない。

述語論理の範囲まで広げると、「$\exists y.\ (\texttt{int}(y) \wedge x = y^2)$」と記述できる。このように書けば,「ある y について… が成立する」という命題になり，y には依存しない.

(b) 「筑波大学の 1 年生の中には、誕生日が同じ人が 1 組以上いる。」(基本命題: P(x)=「x さんは筑波大学の 1 年生である」、Q(x,y,z)=「x さんの誕生日は y 月 z 日である」)

授業では、「$\exists x_1.\exists x_2.\ (P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge (x_1 \neq x_2) \wedge \texttt{birthday}(x_1) = \texttt{birthday}(x_2))$」とした。

この問題では、`birthday` を使ってはいけないので、さらに複雑になる。

「$\exists x_1.\exists x_2.\exists y.\exists z.\ (P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge (x_1 \neq x_2) \wedge Q(x_1, y, z) \wedge Q(x_2, y, z))$」

(c) 「x は y と z の最小公倍数である」(基本命題: $x|y$=「x は y を割り切る (y は x の倍数である)」

「$y|x \land z|x$」までは、容易だろう。しかし、これでは、「最小」であることが表現できていない。

「ある性質を満たすものの中で最小」というのは結構難しい。答えは以下の通り。

「$(y|x \land z|x) \land \forall w.\ ((y|w \land z|w) \Rightarrow x \leq w)$」

これの右の方は、「もし w が y, z の公倍数であれば、$x \leq w$ である」という性質が、どんな w に対しても成立する、ということなので、x が公倍数の中で最小であることを表現できている。

(なお、この問題はちょっと難し過ぎるので、期末試験の範囲からは除外してよい。)

問 2

真理値表に関する以下の問いに答えよ。

(a) 命題 $A \land B$ の否定の真理値表と、命題 $(\neg A) \lor (\neg B)$ の真理値表が等しくなることを確認せよ。このことを通して、命題「x と y が奇数である」を否定すると、命題「x が奇数でないか、または、y が奇数でない」となることを確認せよ。

真理値表は以下の通り。

A	B	$A \land B$	$\neg(A \land B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \lor (\neg B)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

命題 A を「x が奇数である」、命題 B を「y が奇数である」とすると、$A \land B$ は、「x と y が奇数である」となり、$(\neg A) \lor (\neg B)$ は、「x が奇数でないか、または、y が奇数でない」となる。上記の真理値表より、前者の否定と後者は同値である。

(b) 命題 A, B をそれぞれ $(C \Rightarrow D)$, $(\neg D) \Rightarrow (\neg C)$ と置いたときの真理値表を書くことにより、この命題 A と命題 B は同値となることを確かめよ。また、同時に、この命題 A, B について命題 $A \Leftrightarrow B$ を求めると、常に真となることも確かめよ。

真理値表は以下の通り。

C	D	$C \Rightarrow D$	$\neg D$	$\neg C$	$(\neg D) \Rightarrow (\neg C)$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

(c) 命題 $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$ の真理値表を作成し、恒真式となるか否かを確認せよ。

真理値表は以下の通り。

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	全体
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T	T

問 3

以下の文を論理式 (命題) で表現した上で，証明もしくは反証せよ．ただし，反証とは正しくないことを証明することである．

(a) 連続した 3 つの自然数をかけた数は，6 で割り切れる．

このような問題は、まず、「すべての、連続した 3 つの自然数について、。。。」であるか、「ある、連続した 3 つの自然数について、。。。」であるか、を見分けなければいけない。一見すると難しそうであるが、数学的な定理の場合は、ほとんど常に、「すべての」が隠れている。ここでもそうである。

よって、「$\forall x.\ 6|(x(x+1)(x+2))$」となりそうである。しかし、ここで「自然数」という条件を書きわすれた。これは、$\mathtt{Nat}(x)$ により「x は自然数である」という命題を表すことにすると、最終的に、「$\forall x.(Nat(x) \Rightarrow 6|(x(x+1)(x+2)))$」となる。

これが正しいかどうかであるが、連続した 2 つの整数の積は 2 で割り切れ、連続した 3 つの整数の積は 3 で割り切れるので、連続した 3 つの整数の積は 6 で割り切れる。よって正しい。

(b) 7 で割り切れない自然数の 6 乗は，7 で割ると 1 余る．

以下の通りである。

$\forall x.\ ((\mathtt{Nat}(x) \land \neg(7|x)) \Rightarrow \exists y.\ (\mathtt{Nat}(y) \land x^6 = 7y+1))$.

正しいので証明する。まず、「x^6 を 7 で割った余り」は、「「x を 7 で割った余り」の 6 乗を 7 で割った余り」と等しい。x は 7 で割り切れないので、「x を 7 で割った余り」は 1,2,3,4,5,6 のいずれかである。これらを 6 乗して 7 で割ってみると、余りは、1,1,1,1,1,1 となるので、いずれのケースでも 7 で割ると 1 余る。

なお、この問題は、Fermat の (小) 定理の具体的な例である。

問 4 (発展的な問題; できなくても構わない。)

以下の論理式が常に正しいかどうか，理由をつけて述べよ．

- $(\exists y.\forall x.P(x,y)) \Rightarrow (\forall x.\exists y.P(x,y))$

  真である。$\Rightarrow$ の前の部分論理式 (「$\Rightarrow$ の前提」と言う) が真であるとき、どんな x に対しても、$P(x,y)$ が成立する y が存在する。この y のことを y_0 と書くことにする。

  $\Rightarrow$ の後の部分論理式において、「どんな x に対しても、上記の y_0 をとってくれば $P(x,y_0)$ が成立する」のだから、$\forall x.\exists y.P(x,y)$ は真である。

  以上から、どんな $P(x,y)$ に対しても上記の命題が成立する。

- $(\forall x.\exists y.P(x,y)) \Rightarrow (\exists y.\forall x.P(x,y))$

  [ヒント: x, y を自然数を表す変数とし, $P(x,y)$ を「$x = y$」 や「$x < y$」などとしてみるとよい．]

  $P(x,y)$ を $x < y$ と置いてみると、$\forall x.\exists y.P(x,y)$ は、「どんな自然数 x に対しても、それより大きい自然数 y が存在する」という意味になり、これは真である。($y = x+1$ と取れば良い。)

  一方、$\exists y.\forall x.P(x,y)$ は、「どんな自然数 x よりも大きい自然数 y が存在する」という意味になり、そんな自然数は存在しないので偽である。

  $\Rightarrow$ の前提が真で、帰結が偽なので、全体としては、偽である。

  $P(x,y)$ を $x < y$ と置いてみた場合だけであっても、偽となるケースがある、ということは、最初の論理式は「常に正しくはない」ということになる。