

第4章 関係

4.1 関係

$A_1, \dots, A_n$ を集合とするとき, $A_1 \times \dots \times A_n$ の部分集合を $A_1, \dots, A_n$ 上の n 項関係 (relation) と呼ぶ. すなわち, R が $A_1, \dots, A_n$ 上の n 項関係であるとは,

$$R \subset A_1 \times \dots \times A_n$$

であることである. $A_1 = \dots = A_n$ のとき, 単に「 A_1 上の n 項関係」という. また, $n = 2$ のとき, 「 A_1 上の二項関係 (binary relation)」という. 本講義資料では, 主として, 二項関係を扱う.

例 54 $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ とする. $R_1 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle\}$ や $R_2 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle\}$ は二項関係である.

R が二項関係のとき, $\langle x, y \rangle \in R$ のことを xRy とも書く. 上の例では, aR_11 や aR_23 が成立する.

例 55 $A = \{1, 2, 3\}$ とする. 以下の R_3, R_4 は A 上の二項関係である.

$$\begin{aligned} R_3 &= \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\} \\ R_4 &= \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\} \end{aligned}$$

R_3 は $\geq$ (以上) という関係を表し, R_4 は $=$ (等しい) という関係を表す.

4.2 二項関係の性質

R を集合 A 上の二項関係とする. すなわち, $R \subset A \times A$ である.

二項関係 R に対して, 以下の性質は特に有用なので, 名前がついている.

- R が反射的 (reflexive): $\forall x(xRx)$
- R が対称的 (symmetric): $\forall x\forall y(xRy \Rightarrow yRx)$
- R が推移的 (transitive): $\forall x\forall y\forall z((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz)$
- R が反対称的 (antisymmetric): $\forall x\forall y((xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y)$

例 56 自然数の集合 $\mathcal{N}$ 上の二項関係として, $=, \leq, <, \neq, R, S$ を考える. ただし, R, S は以下で定義される関係である.

$$xRy \Leftrightarrow x \text{ と } y \text{ は } 7 \text{ で割った余りが同じ}$$

$$xSy \Leftrightarrow |x - y| \leq 1$$

これらの関係に対する性質を表にすると以下のようなになる.

関係	反射的	対称的	推移的	反対称的
$=$	○	○	○	○
$\leq$	○	×	○	○
$<$	×	×	○	○
$\neq$	×	○	×	×
R	○	○	○	×
S	○	○	×	×

たとえば、関係 R が推移的であることの証明は以下ようになる。 xRy かつ yRz とする。すると、 $(x - y) \bmod 7 = 0$ かつ $(y - z) \bmod 7 = 0$ である。これらより $(x - z) \bmod 7 = 0$ となるので、 xRz が成立する。

一方、関係 S は推移的ではない。 $0S1$ かつ $1S2$ であるが、 $0S2$ でない。

4.3 順序

集合 A 上の二項関係で、反射的かつ推移的かつ反対称的であるものを、 A 上の順序 (order) という。なお、後で定義する全順序と区別するため、一般の順序のことを特に半順序 (partial order) ということがある。

例 57 $\mathcal{N}$ 上の二項関係 $\geq$ と $\leq$ と $=$ はどれも順序である。

一方、 $\mathcal{N}$ 上の二項関係 $<$ は反射的でないので、順序ではない。

例 58 A を集合とすると、 2^A は A の部分集合からなる集合である。 2^A の要素の間の包含関係 $\subset$ は順序である。 $\subset$ が推移的であることは、 $B \subset C$ かつ $C \subset D$ から $B \subset D$ が導けることからわかる。

最大、最小、極大、極小

集合 A 上の順序 R は一種の大小関係と見なすことができる。すなわち、 xRy が成立するとき「 x が R に関して y と等しいか小さい」と見なすことができる。このとき、以下の要素が定義される。

- 最大元 (maximum element) a とは $\forall x \in A (xRa)$ を満たす A の元のことである。
- 最小元 (minimum element) b とは $\forall x \in A (bRx)$ を満たす A の元のことである。
- 極大元 (maximal element) c とは $\forall x \in A (cRx \Rightarrow c = x)$ を満たす A の元のことである。
- 極小元 (minimal element) d とは $\forall x \in A (xRd \Rightarrow x = d)$ を満たす A の元のことである。

ただし、これらの元は存在しないこともある。最大元は極大元の 1 つであり、最小元は極小元の 1 つである。最大元、最小元は、存在すれば唯一だが、極大元、極小元は、1 つとは限らない。

例 59 $\mathcal{N}$ 上の順序 $\leq$ に関する最大元、極大元は存在しない。最小元、極小元は 0 だけである。

例 60 $A = \{1, 2, 3\}$ として、 2^A 上の二項関係として、集合の包含関係を考えると、これは順序となる。

この順序に関する最小元は ϕ である。 (2^A のどんな要素 S に対しても $\phi \subset S$ が成立するので。)

この順序に関する最大元は A である。 (2^A のどんな要素 S に対しても $S \subset A$ が成立するので。)

例 61 $A = \{1, 2, 3\}$ として, $2^A - \{A\}$ という集合上の二項関係として, 集合の包含関係を考える.
 今度は, A がはいっていないので, 最大元は存在しない. (2^A のどんな要素 S に対しても $S \subset T$ が成立するような T は存在しない.) 極大元は, $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}$ の 3 つある.

全順序

集合 A 上の順序 R で, 以下の条件を満たすものを全順序 (total order) という.

$$\forall x \in A \forall y \in A (xRy \vee yRx)$$

すなわち, 任意の 2 つの要素が, R に関して比較可能 (どちらかが小さい) のとき, R を全順序という. 先の例では, $\mathcal{N}$ 上の $\geq$ や $\leq$ は全順序であるが, $2^{\mathcal{N}}$ 上の包含関係 $\subset$ は全順序でない. たとえば, $\{1, 2\}$ と $\{2, 3\}$ は, $\subset$ では関係付けられない.

直積集合上の順序 (†)

R_1, R_2 をそれぞれ集合 A_1, A_2 上の順序とする. このとき, 直積集合 $A_1 \times A_2$ 上の順序として以下の 2 つのものが考えられる¹.

- 直積順序 P :

$$\langle x_1, y_1 \rangle P \langle x_2, y_2 \rangle \Leftrightarrow (x_1 R_1 x_2 \wedge y_1 R_2 y_2)$$

- 辞書式順序 L :

$$\langle x_1, y_1 \rangle L \langle x_2, y_2 \rangle \Leftrightarrow ((x_1 \neq x_2 \wedge x_1 R_1 x_2) \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 R_2 y_2))$$

R_1, R_2 がいずれも全順序であるとき, 辞書式順序も全順序である. 一方, R_1, R_2 が全順序であっても, 直積順序は全順序とは限らない. 国語辞典などの辞書では, 全ての単語を一行に並べる必要があるため, 辞書式順序を (任意の長さの文字列に対して拡張した) 全順序を用いている.

4.4 同値関係

集合 A 上の二項関係で, 反射的, 対称的, 推移的であるものを A 上の同値関係 (equivalence relation) という. 同値関係は, 要素が等しいことを表す関係を一般化したものになっている.

例 62 自然数の集合 $\mathcal{N}$ 上の以下の二項関係は同値関係である.

$$\{\langle n, n \rangle \mid n \in \mathcal{N}\}$$

実数の集合 $\mathcal{R}$ 上の以下の二項関係は同値関係である.

$$\{\langle a, b \rangle \mid a, b \in \mathcal{R} \text{ かつ } |a| = |b|\}$$

一方, $\mathcal{N}$ 上の $\geq$ や $<$ は同値関係ではない.

¹ここでは, 見やすさのために, 一番外側の $\forall x_1$ 等を省略した. 正確に書くならば, $\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2$ を一番外に補う必要がある

同値類 (†)

R を集合 A 上の同値関係とする. $x \in A$ なる x に対して, x の同値類 $[x]$ とは, 以下の集合のことである.

$$[x] = \{y \mid y \in A \wedge xRy\}$$

同値関係 R を「等しい」という概念と見なしたとき, R に関する同値類は x と等しい要素を全て集めた集合である.

商集合 (†)

集合 A 上の同値関係 R に対して, 商集合 A/R は, 同値類をすべて集めた集合である.

$$A/R = \{[x] \mid x \in A\}$$

例 63 自然数上の二項関係 R を次のように定義する.

$$aRb \Leftrightarrow (a \bmod 5 = b \bmod 5)$$

この時, 同値類は以下ようになる.

$$[0] = \{0, 5, 10, 15, \dots\}$$

$$[1] = \{1, 6, 11, 16, \dots\}$$

$$[2] = \{2, 7, 12, 17, \dots\}$$

$$[3] = \{3, 8, 13, 18, \dots\}$$

$$[4] = \{4, 9, 14, 19, \dots\}$$

$\mathcal{N}/R$ は, 以下の集合になる.

$$\mathcal{N}/R = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$$

4.5 関係の合成

R, S をそれぞれ A, B 上の二項関係, B, C 上の二項関係とする. すなわち, $R \subset A \times B, S \subset B \times C$ とする. R と S を合成した関係 $R \circ S$ は次のように定義される².

$$x(R \circ S)y \Leftrightarrow \exists z \in B(xRz \wedge zSy)$$

例 64 以下の自然数上の関係 R, S を考える.

$$R = \{\langle x, x+1 \rangle \mid x \in \mathcal{N}\}$$

$$S = \{\langle x, 2x \rangle \mid x \in \mathcal{N}\}$$

このとき, 関係の合成, $R \circ R, R \circ S, S \circ R$ は以下ようになる.

$$R \circ R = \{\langle x, x+2 \rangle \mid x \in \mathcal{N}\}$$

$$R \circ S = \{\langle x, 2(x+1) \rangle \mid x \in \mathcal{N}\}$$

$$S \circ R = \{\langle x, 2x+1 \rangle \mid x \in \mathcal{N}\}$$

²なお, 一部の教科書では, この定義の R と S を逆に置いた定義を採用しているものがあり, 大変混乱させられる. 参考書の [4] は良くまとまった本であるが, 「逆」の定義を採用しているから注意されたい. 本書では, 国際的に標準的な定義を採用した.

例 65 $\mathcal{R}$ 上の二項関係 $>$ と $<$ に対して,

$$(<) \circ (>) = \mathcal{R} \times \mathcal{R}$$

なぜならば, 任意の x, y に対して, ある z が存在して, $x < z$ かつ $z > y$ となるように z を取ることができるから. ($z = x + y + 1$ と取ればよい.)

関係の合成に関して以下の性質 (結合律) が成り立つ.

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$$

定義 2 R が A 上の二項関係で n が自然数の時, 「 R の (関係としての) n 乗」という関係 R^n が以下のように定義できる³.

$$\begin{aligned} R^0 &= \{\langle a, a \rangle \mid a \in A\} \\ R^{n+1} &= R^n \circ R = R \circ R^n \end{aligned}$$

例 66 $R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle\}$

$$R: \quad a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow d$$

$$R^2: \quad \begin{array}{ccccccc} & & & \nearrow & & & \\ a & & b & & c & & d \\ & & & \searrow & & & \end{array}$$

$$R^3: \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \nearrow & & \\ a & & b & & c & & d \end{array}$$

4.6 閉包 (closure) ($\dagger$)

閉包というのは, 「何らかの性質に関して閉じたもの」という意味である. p を関係に関する性質とする. 関係 R の p に関する閉包とは, R を含み, p の性質を満たす最小の関係のことである. (ただし, p によっては, そのような最小の関係が存在しないこともある.)

p として, 「反射的である」「対称的である」「推移的である」などの性質を取ることが多い.

- R の反射閉包 $r(R)$ とは, R を含み, 反射的である最小の関係.
- R の対称閉包 $s(R)$ とは, R を含み, 対称的である最小の関係.
- R の推移閉包 $t(R)$ とは, R を含み, 推移的である最小の関係.

また, 「最小の関係」というのは, 関係は集合の一種なので, 集合として一番小さいもの (集合の包含関係に関する最小元) という意味である.

例 67 $A = \{a, b, c\}$, $R = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle\}$ とする.

³ここで定義したものは, 集合の章で定義した「集合としての n 乗」とは異なるものである. 異なる概念に同じ記号を使うのは混乱の元であるので避けるべきであるが, ここでは伝統的表記に従った.

$$\begin{aligned}
r(R) &= \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle\} \\
s(R) &= \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, b \rangle\} \\
t(R) &= \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle\}
\end{aligned}$$

また, $S = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle\}$ とすると,

$$\begin{aligned}
r(S) &= \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle\} \\
s(S) &= \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle d, c \rangle\} \\
t(S) &= \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle a, d \rangle\}
\end{aligned}$$

閉包の構成法

R を A 上の二項関係とすると, 反射閉包, 対称閉包, 推移閉包は以下のようにして計算できる.

(a) $r(R) = R \cup R^0$

(b) $s(R) = R \cup R^c$

ただし R^c は, R の左右を逆にした関係であり R の逆関係と呼ばれる.

$$R^c = \{\langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R\}$$

(c) A が n 個の要素を持つ有限集合の時

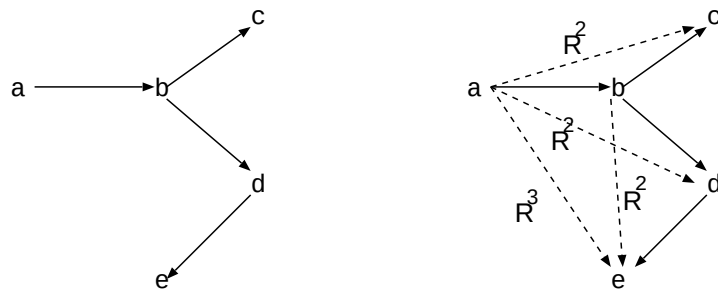
$$t(R) = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

(d) A が無限集合のとき, R の推移閉包 $t(R)$ は以下のように, 無限個の集合の和集合 (極限) として表される.

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

例 68 $A = \{a, b, c, d, e\}$

$$R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle d, e \rangle\}$$



この場合, $R^4 = R^5 = \phi$ である.

例 69 $R = \{\langle x, x+1 \rangle \mid x \in \mathcal{N}\}$ とすると,

$$\begin{aligned}
R &= \{\langle x, x+1 \rangle \mid x \in \mathcal{N}\} \\
R^2 &= \{\langle x, x+2 \rangle \mid x \in \mathcal{N}\} \\
&\vdots \\
R^k &= \{\langle x, x+k \rangle \mid x \in \mathcal{N}\}
\end{aligned}$$

従って, $t(R)$ は関係 $<$ (「より小さい」, “less-than”) となる.

例 70 $\mathcal{N}$ 上の二項関係 **less-than** (より小さい), **not-equal** (等しくない) を考える. それらの閉包は以下の通りである.

$$\begin{aligned} r(\text{less-than}) &= \{\langle x, y \rangle \mid x \leq y\} \\ s(\text{less-than}) &= \{\langle x, y \rangle \mid x \neq y\} (= \text{not-equal}) \\ t(\text{less-than}) &= \{\langle x, y \rangle \mid x < y\} (= \text{less-than}) \\ r(\text{not-equal}) &= \mathcal{N} \times \mathcal{N} \\ s(\text{not-equal}) &= \{\langle x, y \rangle \mid x \neq y\} (= \text{not-equal}) \\ t(\text{not-equal}) &= \mathcal{N} \times \mathcal{N} \end{aligned}$$

例 71 インターネットの Web page 全体の集合を W とし, その上の二項関係 R として, 以下のものを採用する.

$$aRb \Leftrightarrow a \text{ から } b \text{ へのリンクが } 1 \text{ 本以上ある.}$$

R に関する推移閉包 $r(R)$ を考えると, $\langle a, b \rangle \in r(R)$ は「 a からリンクをたどって b に到達可能である」ことを表す.