

『離散構造』 6章 (帰納) の演習問題

出題: 2009.2.20, 提出: 2009.2.27

問題 1 (集合の帰納的定義)

- (a) a, b, c の 3 文字からなる文字列で、同じ文字が 3 回以上連続して現れるものの集合 A を帰納的に定義せよ。たとえば、 $abc \notin A$ であるが、 $aabbbbaac \in A$ である。
- (b) (10 進法の) 自然数をあらわす文字列の集合 B を定義せよ。たとえば、 $123 \in B$ であるが、 $00123 \notin B$ である。(自然数を普通に書くとき、頭に 0 を書いてその後に数字を続けることはない。))
- (c) 前問と同様に、(10 進法の) 小数をあらわす文字列の集合 C を定義せよ。たとえば、 $123 \in C$ や $123.123 \in C$ であるが、 $.123 \notin C$ であるし、 $123.500 \notin C$ である。(ここでは、 123.500 のように末尾に 0 が余計についている文字列も排除して考える。)

問題 2 (関数の帰納的定義) 以下の関数を帰納的に定義せよ。

- (a) 自然数のリストが与えられた時、その最大値を返す関数 \max 。ただし、引数が空リストのときは 0 を返すとする。
- (b) 自然数のリストが与えられた時、それに含まれる数の積を返す関数 mult 。たとえば、 $\text{mult}(\langle 2, 5, 3 \rangle) = 30$ となる。なお、 $\text{mult}(\langle \rangle) = 1$ とする。
- (c) 自然数のリストのリストが与えられた時、その要素のリストたちを全部連結した、1 つのリストを返す関数 flatten 。たとえば、 $\text{flatten}(\langle \langle 1, 2, 3 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 6, 7, 8, 9 \rangle \rangle) = \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$ となる。

問題 3 (自然数に対する帰納法) 関数 $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ が以下の条件を満たすとする。

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n) \leq 2f(n-1) + 2^n - 1 \quad (n > 0 \text{ の時}) \end{cases}$$

このとき、任意の自然数 n に対して、

$$f(n) \leq n \cdot 2^n + 1$$

であることを n に関する帰納法で証明せよ。