『離散構造』 5章 (グラフ) の演習問題
出題: 2009.2.13, 提出: 2009.2.20

問題 1 (グラフ)

無向グラフ G に対して，頂点の集合 V と辺の集合 E が，次のように定められているとする．

$V = \{x \in \mathcal{N} \mid 1 \leq x \leq 100\}$

$E = \{\{x, y\} \subset V \mid (xy = 60) \vee (xy = 70) \vee (x + y = 100)\}$

(無向グラフであることに注意せよ。)

- 頂点 6 と頂点 16 の次数をそれぞれ求めよ．
- 頂点 10 から頂点 100 への道はあるか，同様に頂点 60 から頂点 65 への道はあるか。道がある場合は，その長さも答えよ．
- グラフ G のサイズ (辺の数) を求めよ．
- グラフ G に閉路 (サイクル) は何個あるか求めよ．
- グラフ G の連結成分の個数を求めよ．

問題 2 (木の表現)

無向グラフ G に対して，頂点の集合 V と辺の集合 E が，次のように定められているとする．(ただし M は適当な自然数とする。)

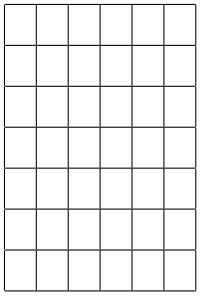
$V = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < M\}$

$E = \{\{x, y\} \subset V \mid (y = 2x + 1) \vee (y = 2x + 2)\}$

- このグラフが頂点 0 を根とする 2 分木であることを示せ。
- $n \in V$ とするとき、頂点 n の親となる頂点 (をあらわす自然数) を、n の式で表せ。
- 上記の形式で 2 分木を表現したとき、高さ h の完全 2 分木を表現するためには、M の値はいくつ以上でなければならないか。

問題 3 (数え上げ)

次の図のようなグラフにおいて、左下の頂点から右上の頂点へ行く道で、長さ 14 のものの本数を答えよ。



問題 4 (推論) [発展]

テキストを参照の上、一筆書きについての以下の 2 つを証明せよ。

- どんな無向グラフでも、次数が奇数である頂点は、偶数個である。

- 次数が奇数である頂点が 4 個以上である無向グラフは、一筆書きができない。
- 次数が奇数である頂点が 2 個である連結な無向グラフは、それらを始点および終点とする一筆書きができる。
- 次数が奇数である頂点が 0 個である連結な無向グラフは、任意の頂点 (正の次数を持つとする) を始点および終点とする一筆書きができる。