

『離散構造』 5 章 の演習問題の解答

出題: 2009.2.13, 提出: 2009.2.20

問題 1 (グラフ)

無向グラフ G に対して、頂点の集合 V と辺の集合 E が、次のように定められているとする。

$$V = \{x \in \mathcal{N} \mid 1 \leq x \leq 100\}$$

$$E = \{\{x, y\} \subset V \mid (xy = 60) \vee (xy = 70) \vee (x + y = 100)\}$$

(無向グラフであることに注意せよ。)

(答えの前に) このような有限グラフの問題は、数学的センスにより鮮かに解けるものもあるが、それ以上に、地道に全ての場合を列挙して答えを探すタイプのもも多い。この問題は後者のタイプであり、特別なセンスは必要としないかわりに、場合分けを見落とさない注意深さが要求される。

- 頂点 6 と頂点 16 の次数をそれぞれ求めよ。(答) $x = 6$ としたとき $(xy = 60) \vee (xy = 70) \vee (x + y = 100)$ を満たす y は $y = 10, 94$ の 2 つである。従って、頂点 6 との間に辺をもつ頂点は 10 と 94 の 2 つであり、頂点 6 の次数は 2 である。同様に、頂点 16 との間に辺をもつ頂点は、84 だけであるので、次数は 1 である。
- 頂点 10 から頂点 100 への道はあるか、同様に頂点 60 から頂点 65 への道はあるか。道がある場合は、その長さも答えよ。(答) 頂点 10 との間に道がある頂点を列挙すると、6, 94, 7, 93, 90 であり、これ以外にはつながっている頂点はない。従って、頂点 10 から 100 への道はない。頂点 60 から 65 への道は、60-1-70-30-2-35-65 とたどるものがある。この道の長さは、6 である。(ここでは単純道をあげたが、この単純道を何度も往復することによりいくらでも長い道ができる。)
- グラフ G のサイズ (辺の数) を求めよ。(答) $xy = 60$ となる x, y の組み合わせは 6 通りあり、 $xy = 70$ となる x, y の組み合わせは 4 通りある。また、 $x + y = 100$ となる組み合わせは ($x = y = 50$ のケースを含め) 50 通りある。これらの 60 通りは、相異なる組み合わせであるので、 G の辺の数は 60 となる。
- グラフ G に閉路 (サイクル) は何個あるか求めよ。(答) この問題の当初の模範解答は「0 個」というものであったが、演習中に指摘されたように、頂点 50 からそれ自身への閉路があった。したがって、1 個が正解である。(指摘してくれた人に感謝。)
- グラフ G の連結成分の個数を求めよ。(答) ほとんどの連結成分は、頂点 n と頂点 $100 - n$ という 2 個の頂点だけで構成される。この形以外の連結成分を全部列挙すると、
 - 1, 2, 30, 35, 40, 60, 65, 70, 98, 99 (頂点 10 個の連結成分)
 - 3, 20, 80, 97 (頂点 4 個の連結成分)
 - 4, 15, 85, 96 (頂点 4 個の連結成分)
 - 5, 12, 14, 86, 88, 95 (頂点 6 個の連結成分)
 - 6, 7, 10, 90, 93, 94 (頂点 6 個の連結成分)
 - 50 (頂点 1 個の連結成分)
 - 100 (頂点 1 個の連結成分)

という 7 個である。逆にいうと、これら以外の全ての頂点は、 $n, 100 - n$ という形の連結成分なので、連結成分の総数は、 $7 + (100 - 10 - 4 - 4 - 6 - 6 - 1 - 1)/2 = 41$ 個となる。

問題 2 (木の表現)

無向グラフ G に対して、頂点の集合 V と辺の集合 E が、次のように定められているとする。(ただし M は適当な自然数とする。)

$$V = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < M\}$$

$$E = \{\{x, y\} \subset V \mid (y = 2x + 1) \vee (y = 2x + 2)\}$$

- このグラフが頂点 0 を根とする 2 分木であることを示せ。

(答) まず、木であることを言う。木とは、連結で閉路がないグラフである。

連結性は、全ての頂点から 0 へ行く道があることから明らか。閉路がないことを示すために閉路があると仮定して矛盾を導こう。閉路があれば、 $n - m$ という辺と $l - m$ という辺が、この閉路に含まれていて、 $n \neq m$ かつ $n < m, l < m$ というものがあるはずである。しかし、これは E の定義と矛盾する。 $(m$ という頂点との間で辺があるような、 m より若い数の頂点は、1 つしかないの。) よって、閉路はない。

さらに 0 を根としたとき、2 分木になっていることを言う。これは、すべての頂点に対して、その子となる頂点が 2 個以下であることを言えばよいが、 E の定義から明らかである。

- $n \in V$ とするとき、頂点 n の親となる頂点 (をあらわす自然数) を、 n の式で表せ。

(答) 頂点 $2x + 1$ と頂点 $2x + 2$ の親が頂点 x であるので、 n の親となる頂点は、 $\lfloor (n - 1)/2 \rfloor$ である。ここで $\lfloor r \rfloor$ は r の小数点以下を切り捨てて得られる整数を表す。

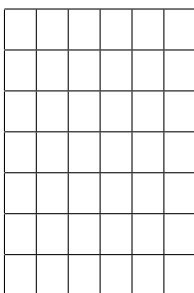
- 上記の形式で 2 分木を表現したとき、高さ h の完全 2 分木を表現するためには、 M の値はいくつ以上でなければならないか。

(答) 完全 2 分木というのは、2 分木の中でもバランスがとれていて、かつ、葉でない頂点はすべて 2 個の子をもつものである。たとえば、高さ 0 の完全 2 分木は $M = 1$ であり (頂点は 0 だけ)、高さ 1 の完全 2 分木は $M = 3$ である (頂点は 0, 1, 2 の 3 つ)。

高さ h の完全 2 分木では、 $M = 2^{h+1} - 1$ となる。(このことを「証明」するためには 6 章で学ぶ、帰納法が必要になるので、ここでは証明は省略する。)

問題 3 (数え上げ)

次の図のようなグラフにおいて、左下の頂点から右上の頂点へ行く道で、長さ 14 のものの本数を答えよ。



(コメント) 今回は、絵を描きそこなって、予想外に難しい問題にしてしまった。というのは、「長さ 13」の道の本数であれば、昨年度の 5 章の問題 (web page 参照) と同様にして、解けるのであるが、「長さ 14」の道というのは存在しないので、存在しない理由を説明しなければならないからである。これは、ちょっと難しい。なぜなら、「道」というのは単純道 (同じ辺を繰り返し使わない道) だけではないからである。

(簡単な答) 左下の頂点から、右上の頂点への道の長さを計算すると、長さ 13 のものの次は、どのように取るとしても長さ 15 以上になるため、長さ 14 のものはない。よって答えは「長さ 14 の道は 0 個」である。

(より精密な答) 上記のグラフの各頂点を、2次元座標のように (m, n) とあらわすことにする。ただし、左下の頂点を $(0, 0)$ として、右上の頂点を $(6, 7)$ とする。証明したい性質は以下のものである。

- 頂点 $(0, 0)$ から頂点 (m, n) への道で、長さが奇数のものがあれば、 $m + n$ は奇数である。
- 頂点 $(0, 0)$ から頂点 (m, n) への道で、長さが偶数のものがあれば、 $m + n$ は偶数である。

この性質は、道の長さに関する帰納法で証明できる。

上記の性質が証明できると、長さ 14 の道で到達できる頂点は $m + n$ が偶数でなければいけないが、与えられたグラフの一番右上の頂点は、 $(6, 7)$ であるので、結局、 $(0, 0)$ から $(6, 7)$ への長さ 14 の道はないことがわかる。

問題 4 (推論) [発展]

テキストを参照の上、一筆書きについての以下の 2 つを証明せよ。

- どんな無向グラフでも、次数が奇数である頂点は、偶数個である。
(答) 1本の辺は、端となる頂点が 2 個あるので、どんなグラフでも、「全ての頂点の次数の合計」は、「辺の本数の 2 倍」に等しい。後者は偶数であるので、前者も偶数であり、従って、「頂点の次数が奇数であるもの」は偶数個である。
- 次数が奇数である頂点が 4 個以上である無向グラフは、一筆書きができない。
(答) 一筆書きの道の上の頂点のうち、この道の始点と終点以外は、辺が偶数本通る。(一筆書きをするとき、その頂点にはいつてくる時と、出ていく時とで、辺が 1 本ずつ必要なので、一度通るたびに、辺が 2 本あることになる。) 従って、一筆書きができたとなると、奇数次数の頂点は、2 個以下でなければならない。
- 次数が奇数である頂点が 2 個である連結な無向グラフは、それらを始点および終点とする一筆書きができる。
このケースの概要は、演習中に説明した。詳細を知りたい人は、一筆書きについて書いてあるパズルの本か、グラフ理論の専門書を参考にしてほしい。
- 次数が奇数である頂点が 0 個である連結な無向グラフは、任意の頂点 (正の次数を持つとする) を始点および終点とする一筆書きができる。
このケースは、1 つ上の「2 個」のケースと同様である。