

『離散構造』4章(関係)の演習問題(亀山)

出題: 2009.1.30

期限: 2009.2.6

問題 1 (2 項関係) 集合 $A = \{x \in \mathcal{N} \mid 1 \leq x \leq 10\}$ 上の 2 項関係として以下の R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 を考える。

$$\begin{aligned}(aR_1b) &\Leftrightarrow (a < b) & (aR_4b) &\Leftrightarrow (3 \mid (a - b)) \\ (aR_2b) &\Leftrightarrow (a \mid b) & (aR_5b) &\Leftrightarrow (a = 2b) \\ (aR_3b) &\Leftrightarrow (|a - b| < 3)\end{aligned}$$

ただし $a \mid b$ は「 a が b の約数である」ことを表す。

- (a) R_2 を集合として具体的に書き下しなさい (その要素を列挙しなさい。)
- (b) 同様に、 R_5 を集合として具体的に書き下しなさい。

問題 2 (2 項関係の性質)

前問の R_i について以下の問に答えなさい。

- (a) R_i のうち反射律を満たすものを全てあげなさい。
- (b) R_i のうち推移律を満たすものを全てあげなさい。
- (c) R_1 は順序か。
- (d) R_2 は順序か。
- (e) R_3 は同値関係か。
- (f) R_4 は同値関係か。
- (g) $R_1 \cup R_2$ は $\mathcal{N}$ 上の二項関係である。これは順序か。

問題 3 (関係の合成)

上記の R_5 に対して、以下のように、 S_i を定義する。

$$\begin{aligned}S_1 &= R_5 \\ S_{i+1} &= S_i \circ R_5 \quad \text{if } i > 0\end{aligned}$$

このとき、以下の問に答えよ。

- S_2, S_3, S_4 を集合として具体的に書き下しなさい。
- $i = 2, 3, 4$ に対して S_i が推移律を満たすか調べなさい。
- (発展課題) A 上の二項関係 T で、 $R_5 \subset T$ となるものを考える。 T が推移律を満たせば、 $S_i \subset T$ であることを示しなさい。

問題 4 (発展課題)

W を英単語の集合とする。 W 上の全順序には、どのようなものがあるか、考察しなさい。