

『離散構造』 Short Quiz

2009.1.30 (亀山)

この用紙に short quiz の解答を書いて提出しなさい。

学籍番号:

氏名:

Short Quiz 1. 集合 $\{a, b\}$ 上の二項関係のうち、対称律を満たすものはいくつあるか？

答え: 集合 $\{a, b\}$ 上の二項関係 R は $\{a, b\} \times \{a, b\}$ の部分集合である。すなわち、

$$R \subset \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$$

である。(ちなみに、この条件を満たす R は、 $2^4 = 16$ 個ある。つまり、二項関係は 16 個ある。)

上のような R が、どのようなときに対称律を満たすか考えると、

- $\langle a, a \rangle \in R$ かどうかは、関係ない。
- $\langle b, b \rangle \in R$ かどうかは、関係ない。
- $\langle a, b \rangle \in R$ であれば、対称律より、 $\langle b, a \rangle \in R$ となるし、逆に、 $\langle b, a \rangle \in R$ であれば、 $\langle a, b \rangle \in R$ となる。つまり、これら 2 つは、両方同時に R にはいるか、はいらないか、である。

以上から、 R の種類としては、(i) $\langle a, a \rangle$ をいれるかどうか、で、2 通り、(ii) $\langle b, b \rangle$ をいれるかどうか、で、2 通り、(iii) $\langle a, b \rangle$ と $\langle b, a \rangle$ のセットをいれるかどうか、で、2 通り、の合計 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 通りある。

Short Quiz 2. 集合 $\{a, b, c\}$ 上の二項関係のうち、順序ではあるが、全順序でないものを 1 つ示しなさい(余力がある人は、1 つだけでなく、そうなるものを全て列挙しなさい)。

答え: たとえば、 $R = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle\}$ とすると、たしかに、反射律、対称律、推移律を満たすので、順序である。これは全順序ではない。($\langle a, b \rangle \in R$ とならないし、 $\langle b, a \rangle \in R$ ともならないので、 a と b が R で比較不能である。)

全順序にならず、順序になるような二項関係は、全部で 7 通りある。(上の 1 個のほかに、 $R' = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle\}$ というタイプの順序が、合計で 6 個ある。)