

『離散構造』 4章の例題

平成20年11月21日

例題1 (関係の性質)

ある瞬間に日本にいる人間からなる集合を H とする。 H 上の二項関係として次のものを考えたとき、反射律、対称律、推移律、反対称律を満たすかどうか、理由をつけて答えよ。また、順序、同値関係であるかどうか答えよ。

- $(aR_1b) \Leftrightarrow (a \text{ が } b \text{ の親である})$
- $(aR_2b) \Leftrightarrow (a \text{ が } b \text{ の祖先である})$
- $(aR_3b) \Leftrightarrow (a \text{ が } b \text{ と夫婦である})$
- $(aR_4b) \Leftrightarrow (a \text{ が } b \text{ と同じ大学の出身である})$
- $(aR_5b) \Leftrightarrow (a \text{ が } b \text{ と身長が同じか身長が高い})$

例題2 (二項関係の性質)

$A = \{a, b, c\}$ とする。 A 上の二項関係のうち、以下の条件を満たすものがあるかどうか答え、ある場合はそのような二項関係を1つあげよ。

- (a) 例: 反射律を満たすが、対称律、推移律は満たさない二項関係 R_1 .

解答: たとえば,

$$R_1 = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle\}$$

- (b) 対称律、推移律は満たすが反射律は満たさない二項関係 R_2 .

- (c) 反射律、推移律、対称律は満たすが、反対称律を満たさない二項関係 R_3 .

例題3 (関係の合成)

$A = \{\text{野球部、テニス部、サッカー部}\}$, $B = \{\text{伊藤、田中、佐藤、太田、福田、森}\}$, $C = \{\text{茨城、群馬、宮城、東京}\}$ とする。

A, B 上の二項関係 R を「 $aRb \Leftrightarrow b$ は a のメンバーである」と定め、 B, C 上の二項関係 S を「 $bSc \Leftrightarrow b$ は c 出身である」と定める。ただし、各クラブのメンバーと、各学生の出身地は下記の表で与えられる。

		伊藤	茨城
		田中	群馬
野球部のメンバー	伊藤、田中、佐藤	佐藤	群馬
テニス部のメンバー	佐藤、太田	太田	宮城
サッカー部のメンバー	佐藤、森、田中	福田	茨城
		森	東京

- 以下のように定められる A, B, C 上の三項関係 T を求めよ。

$$\langle x, y, z \rangle \in T \Leftrightarrow ((xRy) \wedge (ySz))$$

- R と S の合成関係 $R \circ S$ を求めよ。これはどういう集合上の二項関係か？